

# **Lagrange- und Hermite-Interpolation mit Splineräumen auf Triangulierungen**

Inauguraldissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktors der Naturwissenschaften  
der Universität Mannheim

vorgelegt von  
Dipl.-Math. Norbert Kohlmüller  
aus Mannheim

Mannheim, 2001

Dekan: Professor Dr. Herbert Popp, Universität Mannheim  
Referent: Professor Dr. Günther Nürnberger, Universität Mannheim  
Korreferent: Professor Dr. Guido Walz, Universität Mannheim

Tag der mündlichen Prüfung: 29. November 2001

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Bernstein-Bézier-Darstellung</b>	<b>12</b>
2.1	Bernstein-Bézier-Polynome . . . . .	13
2.2	Splinefunktionen auf Triangulierungen . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Hermite-Interpolation auf Triangulierungen</b>	<b>23</b>
3.1	Unterteilungen mit Clough-Tocher Elementen . . . . .	24
3.1.1	Konstruktion einer bestimmenden Menge . . . . .	25
3.1.2	Hermite-Interpolation und Approximationsgüte . . . . .	34
3.2	Minimale Unterteilungen . . . . .	41
3.2.1	Charakterisierung einer minimalen Unterteilung . . . . .	41
3.2.2	Klassen von Triangulierungen . . . . .	49
3.2.3	Unterteilungsalgorithmen . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Hermite-Interpolation auf Quadrangulierungen</b>	<b>58</b>
4.1	Beliebige Quadrangulierungen . . . . .	61
4.1.1	Interpolation mit Clough-Tocher Elementen . . . . .	61
4.1.2	Unterteilung nach Lai und Schumaker . . . . .	64
4.2	Konvexe Quadrangulierungen . . . . .	80
4.2.1	Hermite-Interpolation und Approximationsgüte . . . . .	82
4.2.2	Minimale Unterteilungen . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Lagrange-Interpolation</b>	<b>90</b>
5.1	Interpolation mit Super-Splines . . . . .	92

5.2	Unterteilungsverfahren . . . . .	96
5.2.1	Interpolation mit kubischen Splines . . . . .	96
5.2.2	Interpolation mit quadratischen Splines . . . . .	100
5.3	Konvexe Quadrangulierungen . . . . .	112
<b>6</b>	<b>3D-Oberflächen</b>	<b>118</b>
6.1	Grundlagen . . . . .	119
6.2	Konstruktion von 3D-Oberflächen . . . . .	120
6.3	Approximationsgüte . . . . .	124
6.4	Datenreduktion . . . . .	127
<b>7</b>	<b>Nummerische Ergebnisse</b>	<b>129</b>
7.1	Hermite-Interpolation . . . . .	131
7.2	Lagrange-Interpolation . . . . .	133

# Kapitel 1

## Einleitung

Splinefunktionen haben in den vergangenen Jahren eine große Bedeutung in Anwendungen erlangt. Sie werden beispielsweise in Bereichen der Bildverarbeitung und CAD, der industriellen Fertigung und Steuerung, sowie in der Medizin eingesetzt. Die weite Verbreitung von Splinefunktionen ist auf ihre einfache Darstellung und die hohe Approximationsgüte zurückzuführen.

Ein wichtiger Bereich der Splinetheorie sind bivariate Splinefunktionen auf Triangulierungen. Diese haben vor allem in den letzten 20 Jahren stark an Bedeutung gewonnen. Bivariate Splinefunktionen eignen sich gut zur Darstellung und Rekonstruktion von Oberflächen in graphischen Anwendungen. Aussagen über die Eigenschaften von bivariaten Splines und die Konstruktion von effizienten Interpolationsverfahren sind deshalb auch für praktische Anwendungen von großem Nutzen. Allerdings hat sich gezeigt, dass die Splinetheorie für bivariate Splines wesentlich komplexer ist als für univariate Splines. Wichtige Probleme, die für univariate Splines bereits gelöst wurden, konnten im bivariaten Fall noch nicht geklärt werden. So ist beispielsweise die Dimension von Splineräumen niedrigen Grades noch nicht bekannt. Ebenso sind noch viele Fragen zur Interpolation mit bivariaten Splines offen. Für den Einsatz von Splinefunktion ist aber die Kenntnis von Interpolationsmengen sehr wichtig.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Beschreibung von Interpolationsmengen für bivariate Splinefunktionen auf Triangulierungen. Eine Triangulierung  $\Delta$  ist eine Zerlegung eines Polygonebiets  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  in disjunkte Dreiecke. Über dieser Triangulierung definiert man den Raum der  $r$ -mal stetig-differenzierbaren Splines von Grad  $d$  durch:

$$S_d^r(\Delta) := \left\{ s \in C^r(\Omega) : s|_{T_i} \in \tilde{\Pi}_d, T_i \in \Delta \right\}$$

Das Lagrange-Interpolationsproblem kann nun folgendermaßen beschrieben werden: Gegeben ist eine Menge  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  von Punkten. Für diese Punktmenge wird ein Spline  $s \in S_d^r(\Delta)$  gesucht, der die Funktionwerte  $f(v)$  einer Funktion  $f$  in den Punkten  $v \in P$

interpoliert, d.h. es gilt

$$s(v) = f(v), \quad v \in P$$

Im Falle des Hermite-Interpolationsproblem werden nicht nur die Funktionswerte, sondern auch Ableitungen in den Punkten interpoliert.

In den vergangenen Jahren wurden verschiedene Interpolationsverfahren mit bivariaten Splinefunktionen entwickelt. Für beliebige Triangulierungen wurden bisher vor allem Hermite-Interpolationsverfahren konstruiert. Hier können wir beispielsweise die Verfahren mit finiten Elementen und Makro-Elementen nennen (z. B. Clough und Tocher [45], Laghchim-Lahlou und Sablonnière [90], Lai und Schumaker [98, 101] und Powell und Sabin [121]). Für das Lagrange-Interpolationsproblem wurden in den letzten Jahren verschiedene Lösungen für Klassen von Triangulierungen entwickelt (z. B. Nürnberger und Riessinger [111, 112] und Nürnberger und Zeilfelder [115, 117]). Für beliebige Triangulierungen haben Davydov und Nürnberger [46] Lagrange-Interpolationsmengen für die Splineräume  $S_d^1(\Delta)$  mit  $d \geq 5$  entwickelt. Für niedrigeren Grad  $d$  gibt es bisher noch keine Lagrange-Interpolationsverfahren mit differenzierbaren Splines auf beliebigen Triangulierungen.

Wir entwickeln in dieser Arbeit ein Verfahren zur Konstruktion von Lagrange- und Hermite-Interpolationsmengen auf beliebigen Triangulierungen. Es unterscheidet sich grundlegend von den bekannten Methoden mit finiten Elementen und Makro-Elementen, da wir die Interpolationsmenge schrittweise bestimmen. Unsere Interpolationsverfahren sind deshalb meist effizienter in der Berechnung und benötigen weniger Interpolationsbedingungen als Verfahren mit finiten Elementen. Trotzdem besitzen sie eine hohe Approximationsgüte. Für die Hermite-Interpolation verwenden wir eine Unterteilung mit Clough-Tocher Elementen. Im Gegensatz zur klassischen Methode müssen wir jedoch nur wenige Dreiecke unterteilen. Für diese Unterteilung entwickeln wir Hermite-Interpolanten für Splineräume  $S_d^r(\Delta)$  mit beliebiger Differenzierbarkeitsordnung  $r$  und Grad  $d = 3r$ , falls  $r$  ungerade und  $d = 3r + 1$ , falls  $r$  gerade ist. Für die Lagrange-Interpolation entwickeln wir verschieden Algorithmen zur Unterteilung einer Triangulierung, für die wir Interpolationsmengen für die Splineräume  $S_2^1(\Delta)$  und  $S_3^1(\Delta)$  konstruieren. Unsere Verfahren sind die ersten Lagrange-Interpolationsverfahren mit quadratischen und kubischen  $C^1$ -Splines auf beliebigen Triangulierungen.

Weitgehend unerforscht ist die Spline-Interpolation für 3D-Oberflächen. Interpolationsmethoden mit bivariaten Splines auf Triangulierungen lassen sich auf beliebige, insbesondere geschlossene Oberflächen nicht übertragen. Zur Konstruktion von 3D-Oberflächen sind deshalb andere Ansätze nötig. Hier können wir beispielsweise Verfahren mit Bézier-Patches (z. B. Bajaj, Bernardini und Xu [16, 17], Farin [64, 65], Hahmann und Bonneau [79] und Loop [104]) und Subdivision-Verfahren (z. B. Dyn, Gregory und Levin [58, 59], Kobbelt [89] und Shenkman, Dyn und Levin [134]) nennen. Alle diese Verfahren verwenden jedoch zur Glättung der Oberfläche nur die Information der linearen Dreiecksfläche und besitzen deshalb eine geringe Approximationsgüte. In dieser Arbeit entwickeln wir eine neue Methode, bei der wir durch Interpolation

eine Spline-Oberfläche über einer Dreiecksoberfläche berechnen. Unser Verfahren kann zur Darstellung von beliebigen 3D-Objekten eingesetzt werden und zeichnet sich durch seine hohe Effizienz und Approximationsgüte aus.

Im einzelnen ist die Arbeit wie folgt gegliedert:

In Kapitel 2 werden die Grundlagen über bivariate Splinefunktionen behandelt. Hier beschreiben wir insbesondere die Bernstein-Bézier-Darstellung für bivariate Polynome, die wir in unseren Beweisen vorwiegend verwenden. In diesem Zusammenhang definieren wir den Begriff der bestimmenden Menge eines Splineraums  $S_d^r(\Delta)$ . Eine bestimmende Menge ist eine Menge von Bernstein-Bézier-Koeffizienten, die einen Spline  $s \in S_d^r(\Delta)$  eindeutig definiert. Für die Konstruktion von Hermite-Interpolationsmengen kann man in vielen Fällen aus den Bernstein-Bézier-Punkten einer bestimmenden Menge direkt Interpolationsbedingungen ableiten.

Kapitel 3 beschreibt Hermite-Interpolationsverfahren mit bivariaten Splines  $s \in S_d^r(\Delta)$  für beliebige Differenzierbarkeitsordnung  $r$  und Grad  $d = 3r$  für ungerade  $r$  und  $d = 3r + 1$  für gerade  $r$ . Für diese Splineräume haben Laghchim-Lahlou und Sablonnière [90] Interpolationsverfahren mit Makro-Elementen entwickelt. Sie verwenden hier die klassische Unterteilung, bei der jedes Dreieck nach Clough-Tocher gesplittet wird. Auch wir verwenden eine Unterteilung mit Clough-Tocher Elementen. Im Gegensatz zu dem Verfahren von Laghchim-Lahlou und Sablonnière müssen wir jedoch nur wenige Dreiecke unterteilen. Unser Interpolationsverfahren benötigt deshalb weniger Interpolationsbedingungen und ist effizienter in der Berechnung des Interpolanten. Zunächst stellen wir in Abschnitt 3.1 unsere Unterteilungsmethode vor. Sie ist Grundlage für unser Interpolationsverfahren. Bei dieser Methode bestimmen wir die Unterteilung  $\tilde{\Delta}$  schrittweise für eine vorgegebene Nummerierung der Dreiecke von  $\Delta$ . Wir unterteilen ein Dreieck  $T_i \in \Delta$ , falls es mindestens zwei gemeinsame Kanten mit den Dreiecken  $T_1, \dots, T_{i-1}$  hat. Alle anderen Dreiecke werden nicht unterteilt. Wir benötigen somit für jeden inneren Eckpunkt maximal ein Clough-Tocher Element. Im günstigsten Fall werden sogar weniger als ein Viertel der Dreiecke unterteilt. Für diese Unterteilung beschreiben wir in Satz 3.5 eine bestimmende Menge für den Splineraum  $S_d^r(\tilde{\Delta})$  und leiten hieraus in Satz 3.6 ein Hermite-Interpolationsschema ab. Für diesen Interpolanten untersuchen wir das Approximationsverhalten. Dies erfordert einen umfangreichen und technisch anspruchsvollen Beweis. In Satz 3.8 zeigen wir, dass der Interpolant für gerade  $r$  die optimale Approximationsordnung  $d + 1$  besitzt. Diese Aussage gilt unabhängig von der Anzahl der Clough-Tocher Elemente. In Satz 3.9 bestimmen wir die Approximationsordnung für ungerade  $r$ . In diesem Fall hat der Interpolant nicht immer die optimale Approximationsordnung. Für eine Unterteilung mit einer minimalen Anzahl von Clough-Tocher Elementen besitzt er zumindest die Approximationsordnung  $d$ . Mit unseren Algorithmen können wir aber Unterteilungen konstruieren, für die der Interpolant sogar optimale Approximationsordnung  $d + 1$  besitzt. Selbst in diesem Fall müssen wir maximal die Hälfte der Dreiecke unterteilen.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage, wieviele Dreiecke zur Interpolati-

on unterteilt werden müssen. Unser Ziel ist es, eine Unterteilung mit einer minimalen Anzahl von Clough-Tocher Elementen zu bestimmen. Für die Herleitung mussten wir graphentheoretischen Methoden, insbesondere Methoden der Matching-Theorie, verwenden. Ein Matching ist eine Menge von disjunkten Kanten eines Graphs  $G$ . Das Problem des maximalen Matchings besteht nun darin, eine maximale Menge von disjunkten Kanten zu bestimmen. Zur Konstruktion einer minimalen Unterteilung einer Triangulierung  $\Delta$  betrachten wir nun die Menge der inneren Eckpunkte und der Kanten mit zwei inneren Eckpunkten als einen Graphen und bestimmen ein maximales Matching für diesen Graphen. Die Kanten des maximalen Matchings beschreiben uns die Lage der Clough-Tocher Elemente. In Satz 3.17 folgern wir hieraus, dass die Anzahl der Clough-Tocher Elemente für unsere Unterteilung  $\tilde{\Delta}$  mindestens so groß wie die Anzahl der inneren Eckpunkte minus der Anzahl eines maximalen Matchings ist. Diese Aussage verschärfen wir in Satz 3.20 und zeigen, dass für große Klassen von Triangulierungen in Satz 3.17 die Gleichheit gilt. Aus diesem Satz leiten wir optimale Unterteilungen für  $\Delta^1$ - und  $\Delta^2$ -Triangulierungen ab. Anschließend entwickeln wir zwei effiziente Algorithmen zur Berechnung einer Unterteilung mit einer möglichst kleinen Anzahl von Clough-Tocher Elementen. Diese Algorithmen verwenden wir in Kapitel 7 für unsere numerischen Beispiele. Die Berechnung der Unterteilung erfolgt selbst für große Triangulierungen mit mehr als 100.000 Dreiecken in Echtzeit.

Kapitel 4 behandelt die Hermite-Interpolation auf Quadrangulierungen. Eine Quadrangulierung ist eine Zerlegung eines Polygonebiets in disjunkte Vierecke. Zur Interpolation werden die Vierecke durch Hinzufügen von ein oder zwei Diagonalen trianguliert. Für Quadrangulierungen haben beispielsweise Laghchim-Lahlou und Sablonnière [91] und Lai und Schumaker [98] Interpolationsverfahren mit Makro-Elementen entwickelt. Wir beschreiben in diesem Kapitel drei Verfahren zur Interpolation mit bivariaten Splines auf Quadrangulierungen. Die ersten beiden Verfahren können für beliebige, d. h. auch nicht konvexe Quadrangulierungen verwendet werden. Das dritte Verfahren benötigt eine konvexe Quadrangulierung. Wie bei den Verfahren aus Kapitel 3 verwenden wir eine iterative Methode zur Konstruktion der Unterteilung und der Interpolationsmengen. Bei dem ersten Verfahren wird jedes Viereck zunächst in zwei Dreiecke unterteilt. Anschließend verwenden wir für einige Dreiecke eine Unterteilung nach Clough-Tocher. Die Unterteilung erfolgt schrittweise durch Anhängen von Vierecken an die Quadrangulierung. Für diese Unterteilung  $\tilde{\Delta}$  konstruieren wir in Satz 4.2 ein Interpolationsverfahren für die Splineräume  $S_d^r(\tilde{\Delta})$  mit beliebiger Differenzierbarkeitsordnung  $r$  und Grad  $d = 3r$  für ungerade  $r$  und  $d = 3r + 1$  für gerade  $r$ . Für dieses Verfahren gelten die Ergebnisse aus Kapitel 3, insbesondere die Aussagen über die Approximationsordnung aus Satz 3.8 und 3.9. Das zweite Verfahren verwendet eine Unterteilung nach Lai und Schumaker [98]. Bei dieser Unterteilung  $\diamond$  wird jedes Viereck in vier Dreiecke unterteilt. Diese Unterteilung verwenden wir in den Sätzen 4.8 und 4.12 zur Konstruktion von Interpolationsmengen für die Splineräume  $S_3^1(\diamond)$  und  $S_7^2(\diamond)$ . Im Fall des kubischen  $C^1$ -Splines erhalten wir eine Verallgemeinerung der Ergebnisse von Lai [96] für konvexe Quadrangulierungen. Zur Konstruktion der Interpolationsmengen gehen wir wie



in Kapitel 3 vor und beschreiben zunächst eine bestimmende Menge für die beiden Splineräume. Hieraus leiten wir anschließend die Interpolationsverfahren ab. Die Konstruktion einer bestimmenden Menge für nicht-konvexe Quadrangulierungen ist äußerst schwierig und benötigt eine geeignete Nummerierung der Vierecke. Die Existenz einer solchen Nummerierung ist nicht offensichtlich und erfordert einen umfangreichen Beweis.

Für konvexe Quadrangulierungen entwickeln wir in Abschnitt 4.2 ein Unterteilungsverfahren, bei dem die Vierecke durch Hinzufügen von Diagonalen in zwei oder vier Vierecke unterteilt werden. Wie bei dem ersten Verfahren bestimmen wir die Unterteilung schrittweise durch Anhängen der Vierecke an die Quadrangulierung. Im Gegensatz zu dem Verfahren mit Clough-Tocher Elementen erhalten wir aber in jedem Viereck maximal vier Dreiecke. Das Verfahren erzeugt deshalb in der Regel eine Unterteilung mit weniger Dreiecken. Für diese Unterteilung  $\tilde{\Delta}$  entwickeln wir in Satz 4.17 Interpolationsmengen für die Splineräume  $S_d^r(\tilde{\Delta})$  mit  $d = 3r$  für ungerade  $r$  und  $d = 3r + 1$  für gerade  $r$ . Wir untersuchen anschließend die Approximationsordnung unserer Interpolationsverfahren. In Satz 4.18 und 4.19 zeigen wir, dass der Interpolant für gerade  $r$  optimale Approximationsordnung  $d + 1$  und für ungerade  $r$  fast-optimale Approximationsordnung  $d$  besitzt. Zum Schluß dieses Abschnitts beschreiben wir noch einen effizienten Algorithmus zur Konstruktion einer Unterteilung mit einer möglichst kleinen Anzahl von Dreiecken.

In Kapitel 5 behandeln wir die Lagrange-Interpolation mit bivariaten Splinefunktionen. Im Gegensatz zur Hermite-Interpolation gibt es für beliebige Triangulierungen bisher noch keine Lagrange-Interpolationsverfahren mit quadratischen oder kubischen  $C^1$ -Splines. Für Klassen von Triangulierungen wurden auch für diese Fälle Lagrange-Interpolationsverfahren entwickelt, beispielsweise von Laghchim-Lahlou und Sablonnière [93], Nürnberger und Riessinger [111, 112], Nürnberger und Walz [113] und Nürnberger und Zeilfelder [115, 117]. Für beliebige Triangulierungen haben Davydov und Nürnberger [46] Lagrange-Interpolationsmengen für die Splineräume  $S_d^1(\Delta)$  mit  $d \geq 5$  konstruiert. Wir beschreiben in diesem Kapitel eine Methode, mit der wir Interpolationsmengen für beliebige Triangulierungen konstruieren können. Hierzu verwenden wir wieder ein iteratives Verfahren und entwickeln verschiedene Unterteilungsalgorithmen. In Abschnitt 5.1 beschreiben wir zwei Verfahren für die Super-Splineräume  $S_3^{0,1}(\Delta)$  und  $S_5^{1,2}(\Delta)$ . Diese Verfahren benötigen keine Unterteilung der Dreiecke.

Im folgenden Abschnitt betrachten wir Lagrange-Interpolanten ohne Super-Spline Eigenschaft. Wir entwickeln verschiedene Unterteilungsmethoden zur Interpolation mit den Splineräumen  $S_2^1(\Delta)$  und  $S_3^1(\Delta)$ . Dies sind die ersten Lagrange-Interpolationsverfahren mit quadratischen und kubischen  $C^1$ -Splines auf beliebigen Triangulierungen. Für die Interpolation mit kubischen Splines verwenden wir zur Konstruktion der Interpolationsmengen die Unterteilung nach Clough-Tocher. Zuerst betrachten wir die klassische Unterteilung, bei der alle Dreiecke gesplittet werden und beschreiben in Satz 5.5 eine Lagrange-Interpolationsmenge. In Satz 5.6 konstruieren wir für unsere iterative Un-

terteilungsmethode aus Kapitel 3 eine Interpolationsmenge für den Splineraum  $S_3^1(\tilde{\Delta})$ . Anschließend entwickeln wir zwei Interpolationsverfahren mit quadratischen Splines. Der erste Interpolant aus Satz 5.7 verwendet eine Unterteilung nach Powell-Sabin. Bei dieser Unterteilung wird jedes Dreieck in sechs Subdreiecke unterteilt. Das zweite Verfahren, das wir in Satz 5.12 entwickeln, verwendet eine neue Unterteilungsmethode, bei der die Dreiecke auf verschiedene Weise gesplittet werden. Wie bei der Unterteilung nach Powell-Sabin werden zusätzliche Hilfspunkte auf den Kanten eingefügt. Wir benötigen aber nicht auf jeder Kante einen Hilfspunkt, so dass unsere Unterteilung weniger Dreiecke als die klassische Unterteilung nach Powell-Sabin enthält. Für diese Unterteilung konstruieren wir einen quadratischen Interpolanten, der nur die Funktionswerte in den Eckpunkten von  $\Delta$  benötigt. Er kann deshalb direkt zur Interpolation verstreuter Daten verwendet werden.

Der letzte Abschnitt in Kapitels 5 behandelt die Lagrange-Interpolation für konvexe Quadrangulierungen. Wir entwickeln hier zwei Interpolationsverfahren mit Splines  $s \in S_3^1(\Delta)$ . Bei dem ersten Verfahren werden alle Vierecke durch Hinzufügen von zwei Diagonalen in vier Dreiecke unterteilt. Für diese Unterteilung beschreiben wir in Satz 5.13 eine Interpolationsmenge. Das zweite Verfahren verwendet unsere iterative Unterteilungsmethode aus Kapitel 4, für die wir in Satz 5.14 ein Lagrange-Interpolationsverfahren konstruieren.

In Kapitel 6 beschreiben wir ein Verfahren zur Konstruktion von 3D-Oberflächen. Es unterscheidet sich grundlegend von allen bekannten Verfahren und zeichnet sich durch seine hohe Approximationsgüte aus. Bei diesem Verfahren wird durch Lagrange-Interpolation eine kubische Spline-Oberfläche über einer Dreiecksoberfläche im Raum berechnet. Die Konstruktion der Oberfläche erfolgt in zwei Stufen. Zunächst wird ein stetiger Interpolant berechnet. Zur Konstruktion einer glatten Oberfläche projizieren wir anschließend die Bernstein-Bézier-Koeffizienten des stetigen Splines in geeignete Tangentialebenen. Die Bernstein-Bézier-Koeffizienten unseres Interpolanten erfüllen somit Übergangsbedingungen, die den Differenzierbarkeitsbedingungen von Splinefunktionen auf ebenen Triangulierungen entsprechen. Zur Beschreibung unseres Verfahrens definieren wir im ersten Abschnitt die Bernstein-Bézier-Darstellung für Polynome im Raum. Anschließend beschreiben wir unser Interpolationsverfahren und zeigen in Satz 6.2, dass der Spline-Interpolant in jedem Eckpunkt der Triangulierung differenzierbar ist. Im dritten Abschnitt untersuchen wir das Approximationsverhalten des Interpolanten. Hierzu betrachten wir das folgende Modell: Gegeben ist eine Funktion  $f \in C^4(\Omega)$  über einem Polygonegebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ . Für diese Funktion berechnen wir die Splineoberfläche nach unserem Interpolationsverfahren. In Satz 6.8 zeigen wir, dass der Interpolant für dieses Modell die optimale Approximationsordnung 4 hat. Der letzte Abschnitt enthält eine Anwendung unseres Verfahrens zur Datenreduktion von stückweisen linearen Dreiecksoberflächen. Die Beispiele zeigen, dass unsere Methode hervorragend zur Rekonstruktion von Oberflächen im Raum geeignet ist. Aufgrund der hohen Approximationsgüte lassen sich Oberflächen effizient und detailgetreu darstellen.

Kapitel 7 enthält numerische Beispiele zu unseren Interpolationsmethoden. Wir te-

sten hier verschiedene Verfahren aus den Kapiteln 3 und 5 und vergleichen diese mit Interpolationsmethoden mit finiten Elementen. Die Ergebnisse zeigen, dass unsere Verfahren sehr effizient sind und eine hohe Approximationsgüte besitzen. Die Berechnung der Unterteilungen erfolgt selbst für große Triangulierungen in Echtzeit. Die Berechnungszeit für die Interpolanten ist linear in der Anzahl der Interpolationsbedingungen und beträgt in allen Fällen nur wenige Sekunden. Der Vergleich mit den Methoden mit finiten Elementen unterstreicht die analytischen Aussagen über das Approximationsverhalten unserer Verfahren. Sowohl der absolute Interpolationsfehler als auch die Approximationsgüte ist in den Beispielen mit den Ergebnissen für die Interpolanten mit finiten Elementen vergleichbar.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Nürnberger für die Anregung zu dieser Arbeit und die Betreuung während ihres Entstehens danken.

## Kapitel 2

# Bernstein-Bézier-Darstellung

Zur Untersuchung von bivariaten Polynomen und Splines auf Dreiecken eignet sich die Bernstein-Bézier-Form. Bei dieser Darstellung werden die Punkte  $v \in \mathbb{R}^2$  durch baryzentrische Koordinaten bezüglich der Dreiecke beschrieben. Die Bernstein-Bézier-Darstellung hat den Vorteil, dass sie symmetrisch in den Variablen ist und affine Transformationen aller Punkte die Koeffizienten eines Polynoms unverändert lassen. Weiter zeigt sich, dass man Differenzierbarkeitsbedingungen an den Kanten und in den Eckpunkten einfach durch Beziehungen zwischen den Bernstein-Bézier-Koeffizienten beschreiben kann. Diese Beziehungen lassen sich auch geometrisch darstellen.

Methoden mit Bernstein-Bézier-Polynomen finden sich in Arbeiten über die Dimension und Approximationsordnung von bivariaten Splineräumen, beispielsweise bei Alfeld, Piper und Schumaker [10, 11], Alfeld und Schumaker [12, 13, 14], de Boor [22, 23], de Boor und Höllig [24], de Boor und Jia [25], Hong [81], Ibrahim und Schumaker [85], Lai und Schumaker [99, 100] und Schumaker [130]. Ebenso wird die Bernstein-Bézier-Darstellung häufig zur Beschreibung von Interpolationsmethoden mit bivariaten Splines verwendet, beispielsweise bei Alfeld [2, 3], Chui und He [34], Chui und Hong [35, 36], Chui, Hong und Jia [37], Chui und Lai [38, 39, 40], Farin [63, 64], Gao [69, 70], Gmelig Meyling [73], Gmelig Meyling und Pfluger [75], Laghchim-Lahlou und Sablonnière [90, 91, 92, 93], Lai [95, 96, 97], Lai und Schumaker [98], Nürnberger und Zeilfelder [117], Sablonnière [125, 126], Schumaker [131], Sha [132, 133], Wang [141], Whelan [142] und Zhao und Sun [145]. Auch wir werden für unsere Untersuchungen die Bernstein-Bézier-Darstellung verwenden.

In diesem Kapitel wiederholen wir die Grundlagen der Bernstein-Bézier-Darstellung von Polynomen und Splines auf Dreiecken. Der erste Abschnitt behandelt die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes  $v \in \mathbb{R}^2$  und definiert Bernstein-Bézier-Polynome. Ebenso untersuchen wir hier ausführlich die Differenzierbarkeitsbedingungen an den Kanten und in den Eckpunkten der Dreiecke und zeigen den Zusammenhang zwischen den Bernstein-Bézier-Koeffizienten eines Polynoms und den Ableitungen in den Eckpunkten und an den Kanten. Diese Ergebnisse sind wichtig für die Beschreibung von

Interpolationsmengen. Im zweiten Abschnitt definieren wir bivariate Splines auf Triangulierungen und übertragen die Bernstein-Bézier-Darstellung auf diese. Zudem werden wichtige Sätze über die Dimension von bivariaten Splineräumen wiederholt.

## 2.1 Bernstein-Bézier-Polynome

Für die Bernstein-Bézier-Darstellung werden die *baryzentrischen Koordinaten* eines Punktes  $v \in \mathbb{R}^2$  bezüglich eines Dreiecks  $T = \triangle(v_1, v_2, v_3)$  benötigt. Diese Koordinaten erhält man als eindeutige Lösung  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \\ 1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned}$$

Betrachtet man  $\lambda_i$  als Funktion in  $v$ , dann sieht man leicht, dass  $\lambda_i$  ein bivariates Polynom vom Grade 1 ist (siehe de Boor [22] und Farin [62, 64]). Wegen der Eindeutigkeit der Lösung muss diese Funktion die Bedingung  $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  erfüllen.  $\lambda_1$  beschreibt also eine Ebene, die durch die Kante  $\overline{v_2 v_3}$  geht und in  $v_1$  den Wert 1 hat. Mit Hilfe der baryzentrischen Koordinaten lassen sich nun Basisfunktionen des Polynomraums  $\tilde{\Pi}_d$  definieren.

**Definition 2.1.** Sei  $T$  ein Dreieck und  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Z}_+^3$  ein Multiindex mit  $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = d$ , dann heißt  $B_\alpha^d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$B_\alpha^d(\lambda) := \frac{d!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3}$$

*Bernstein-Bézier-Polynom* vom Grad  $d$ .

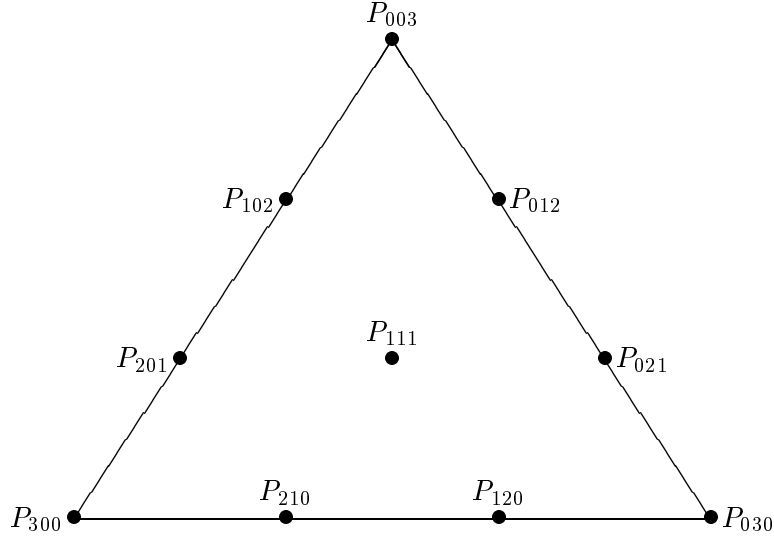
Verwendet man für  $\lambda_i$  die baryzentrischen Koordinaten, dann ist  $B_\alpha^d(\lambda(\cdot))$  ein bivariates Polynom vom Grade  $d$  und man erhält mit  $\{B_\alpha^d(\lambda(\cdot)) : |\alpha| = d\}$  eine Basis des Polynomraums  $\tilde{\Pi}_d$  (siehe de Boor [22] und Farin [62, 64]). Somit hat jedes Polynom  $p \in \tilde{\Pi}_d$  eine eindeutige Darstellung

$$p(v) = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha B_\alpha^d(\lambda(v))$$

Die Koeffizienten  $c_\alpha$  heißen die *Bernstein-Bézier-Koeffizienten* von  $p$ . Für eine geometrische Darstellung von Differenzierbarkeitsbedingungen an den Kanten und in den Eckpunkten von  $\Delta$  werden die Bernstein-Bézier-Koeffizienten den Punkten

$$P_\alpha := \frac{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3}{d}$$

zugeordnet. Die Punkte  $P_\alpha$  heißen *Bernstein-Bézier-Punkte* von  $T$  und die Menge  $\{(P_\alpha, c_\alpha) : |\alpha| = d\}$  das *Bernstein-Bézier-Netz* von  $p$  auf  $T$ . Da die Koeffizienten  $c_\alpha$

Abbildung 2.1: Bernstein-Bézier-Punkte eines Dreiecks für  $\tilde{\Pi}_3$ 

das Polynom  $p$  eindeutig bestimmen, kann  $p$  auch durch sein Bernstein-Bézier-Netz beschrieben werden.

Farin [62, 64] hat nun gezeigt, dass zwischen den Ableitungen eines Polynoms  $p \in \tilde{\Pi}_d$  und den Ableitungen der Bernstein-Bézier-Darstellung von  $p$  nach den baryzentrischen Koordinaten  $\lambda$  ein Zusammenhang besteht (siehe auch de Boor [22] und Chui und Lai [38, 40]). Dieser lässt sich geometrisch beschreiben und ermöglicht eine direkte Berechnung der Bernstein-Bézier-Koeffizienten aus den Ableitungen in den Eckpunkten und an den Kanten eines Dreiecks. In dem folgenden Satz werden diese Aussagen von Farin dargestellt. Hierfür definieren wir die Richtungsableitung<sup>1</sup>  $D_z f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$  in Richtung eines Vektors  $z \neq 0$  durch

$$D_z f(v) := z \operatorname{grad} f(v)$$

Da die Kanten  $\overline{v_1 v_3}$  und  $\overline{v_2 v_3}$  eines Dreiecks  $T = \triangle(v_1, v_2, v_3)$  nicht kollinear sind, kann man den Vektor  $z$  auch in der Form

$$z = \zeta_1(v_1 - v_3) + \zeta_2(v_2 - v_3) = \zeta_1 v_1 + \zeta_2 v_2 - (\zeta_1 + \zeta_2)v_3$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten  $\zeta_1, \zeta_2$  schreiben. Jeder Richtungsvektor  $z$  lässt sich somit bezüglich  $T$  durch einen *baryzentrischen Richtungsvektor*  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  mit  $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 0$  darstellen.

---

<sup>1</sup>Zur Vereinfachung der Darstellung verwenden wir diese Definition auch für nicht-normierte Vektoren.

**Satz 2.2.** Seien  $T = \triangle(v_1, v_2, v_3)$  und  $\tilde{T} = \triangle(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$  zwei Dreiecke,  $p : T \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{p} : \tilde{T} \longrightarrow \mathbb{R}$  zwei Polynome mit der Bernstein-Bézier-Darstellung

$$p(v) = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha B_\alpha^d(\lambda(v))$$

$$\tilde{p}(v) = \sum_{|\alpha|=d} \tilde{c}_\alpha B_\alpha^d(\tilde{\lambda}(v))$$

und  $s : T \cup \tilde{T} \longrightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$s(v) := \begin{cases} p(v) & v \in T \\ \tilde{p}(v) & v \in \tilde{T} \setminus T \end{cases}$$

(i) Seien  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$  zwei Vektoren und  $\zeta_1, \zeta_2$  die zugehörigen baryzentrischen Richtungsvektoren bezüglich  $T$ . Dann gilt für  $\nu + \mu \leq d$ :

$$D_{z_1}^\nu D_{z_2}^\mu p = \frac{d!}{(d - \nu - \mu)!} \sum_{|\alpha|=d-\nu-\mu} \sum_{|\beta|=\nu} \sum_{|\gamma|=\mu} c_{\alpha+\beta+\gamma} B_\beta^\nu(\zeta_1) B_\gamma^\mu(\zeta_2) B_\alpha^{d-\nu-\mu}(\lambda)$$

(ii) Es gelte  $v_1 = \tilde{v}_1$  und  $\lambda_2, \lambda_3$  seien die baryzentrischen Koordinaten von  $\tilde{v}_2, \tilde{v}_3$  bezüglich  $T$ . Dann ist  $s$  in  $v_1$  genau dann  $\rho$ -mal stetig differenzierbar, wenn für alle  $|\alpha| = d$  mit  $\alpha_2 + \alpha_3 \leq \rho$  gilt:

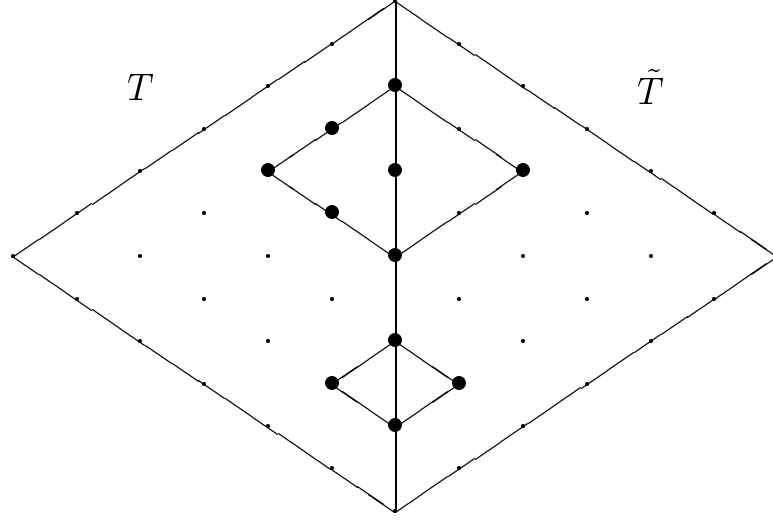
$$\tilde{c}_\alpha = \sum_{|\beta|=\alpha_2} \sum_{|\gamma|=\alpha_3} c_{(\alpha_1, 0, 0) + \beta + \gamma} B_\beta^{\alpha_2}(\lambda_2) B_\gamma^{\alpha_3}(\lambda_3)$$

(iii) Es gelte  $v_1 = \tilde{v}_1$  und  $v_2 = \tilde{v}_2$  und  $\lambda$  seien die baryzentrischen Koordinaten von  $\tilde{v}_3$  bezüglich  $T$ . Dann ist  $s$  über die gemeinsame Kante  $\overline{v_1 v_2}$  genau dann  $r$ -mal stetig-differenzierbar, wenn für alle  $|\alpha| = d$  mit  $\alpha_3 \leq r$  gilt:

$$\tilde{c}_\alpha = \sum_{|\beta|=\alpha_3} c_{(\alpha_1, \alpha_2, 0) + \beta} B_\beta^{\alpha_3}(\lambda)$$

Die  $C^r$ -Bedingung nach Satz 2.2 (iii) besagt, dass man die Koeffizienten  $\tilde{c}_\alpha$  mit  $\alpha_3 \leq r$  als Linearkombination aus den Koeffizienten  $c_\beta$  mit  $\beta_3 \leq \alpha_3$  berechnen kann. Entsprechendes gilt für zwei Dreiecke mit einem gemeinsamen Eckpunkt nach Satz 2.2 (ii). Die Abbildung 2.2 zeigt den Zusammenhang für die Fälle  $r = 1, 2$ .

Für die Konstruktion von Hermite-Interpolaten ist es wichtig, den Zusammenhang zwischen den Bernstein-Bézier-Koeffizienten und den Ableitungen in den Eckpunkten und an den Kanten zu untersuchen. Für die Eckpunkte von  $\Delta$  beschreibt dies der folgende Satz (siehe Chui und Lai [38, 39, 40], Farin [62, 64], Lai [94], und Nürnberger und Zeilfelder [117]).

Abbildung 2.2:  $C^1$ - und  $C^2$ -Bedingung an der Kante zweier Dreiecke

**Satz 2.3.** Sei  $T = \triangle(v_1, v_2, v_3)$  ein Dreieck,  $z_i := v_i - v_1$ ,  $i = 2, 3$  und  $p \in \tilde{\Pi}_d$  mit der Bernstein-Bézier-Darstellung  $\sum_{|\alpha|=d} c_\alpha B_\alpha^d(\lambda)$ .

(i) Für  $\nu + \mu \leq d$  gilt:

$$D_{z_2}^\nu D_{z_3}^\mu p(v_1) = \frac{d!}{(d - \nu - \mu)!} \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{\mu} \binom{\nu}{k} \binom{\mu}{m} (-1)^{\nu-k+\mu-m} c_{d-k-m,k,m}$$

(ii) Für  $|\alpha| = d$  gilt:

$$c_\alpha = \sum_{\nu=0}^{\alpha_2} \sum_{\mu=0}^{\alpha_3} \binom{\alpha_2}{\nu} \binom{\alpha_3}{\mu} \frac{(d - \nu - \mu)!}{d!} D_{z_2}^\nu D_{z_3}^\mu p(v_1)$$

**Beweis:** Aus Satz 2.2 (i) erhält man mit  $\lambda = (1, 0, 0)$ ,  $\zeta_2 = (-1, 1, 0)$  und  $\zeta_3 = (-1, 0, 1)$ :

$$\begin{aligned} D_{z_2}^\nu D_{z_3}^\mu p(v_1) &= \frac{d!}{(d - \nu - \mu)!} \sum_{\substack{|\alpha|=d-\nu-\mu \\ \alpha_2=\alpha_3=0}} \sum_{\substack{|\beta|=\nu \\ \beta_3=0}} \sum_{\substack{|\gamma|=\mu \\ \gamma_2=0}} c_{\alpha+\beta+\gamma} B_\beta^\nu(\zeta^2) B_\gamma^\mu(\zeta^3) B_\alpha^{d-\nu-\mu}(\lambda) \\ &= \frac{d!}{(d - \nu - \mu)!} \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{\mu} \binom{\nu}{k} \binom{\mu}{m} (-1)^{\nu-k+\mu-m} c_{d-k-m,k,m} \end{aligned}$$



Sei nun  $|\alpha| = d$ , dann folgt aus (i) wegen  $\sum_{k=i}^j \binom{j}{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} = \delta_{ij}$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=0}^{\alpha_2} \sum_{\mu=0}^{\alpha_3} \binom{\alpha_2}{\nu} \binom{\alpha_3}{\mu} \frac{(d-\nu-\mu)!}{d!} D_{z_2}^{\nu} D_{z_3}^{\mu} p(v_1) \\
&= \sum_{\nu=0}^{\alpha_2} \sum_{\mu=0}^{\alpha_3} \binom{\alpha_2}{\nu} \binom{\alpha_3}{\mu} \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{\mu} \binom{\nu}{k} \binom{\mu}{m} (-1)^{\nu-k+\mu-m} c_{d-k-m,k,m} \\
&= \sum_{k=0}^{\alpha_2} \sum_{m=0}^{\alpha_3} \left( \sum_{\nu=k}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{\nu} \binom{\nu}{k} (-1)^{\nu-k} \right) \left( \sum_{\mu=m}^{\alpha_3} \binom{\alpha_3}{\mu} \binom{\mu}{m} (-1)^{\mu-m} \right) c_{d-k-m,k,m} \\
&= c_{\alpha}
\end{aligned}$$

□

Nach Satz 2.3 lassen sich die Bernstein-Bézier-Koeffizienten  $c_{\alpha}$  mit  $\alpha_i \geq d-\nu$  direkt aus den Ableitungen bis zur Ordnung  $\nu$  im Eckpunkt  $v_i$  berechnen und umgekehrt erhält man die partiellen Ableitungen aus den Bernstein-Bézier-Koeffizienten. Eine ähnliche Aussage lässt sich auch für die Ableitungen an den Kanten der Dreiecke herleiten. Hier gibt es einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten in den ersten  $r+1$  Reihen parallel zur Kante und den Richtungsableitung bis zur Ordnung  $r$ . Diesen Zusammenhang beschreiben wir in dem folgenden Satz.

**Satz 2.4.** *Es seien  $T := \triangle(v_1, v_2, v_3)$  ein Dreieck,  $p \in \tilde{\Pi}_d$  in der Bernstein-Bézier-Darstellung  $p = \sum_{|\alpha|=d} c_{\alpha} B_{\alpha}^d(\lambda)$  und  $\nu \leq d$ . Weiter seien  $z$  ein Vektor, der nicht parallel zur Kante  $e := \overline{v_1 v_2}$  verläuft,  $0 < \lambda_0 < \dots < \lambda_{k-1} < 1$  für  $k \leq d-\nu+1$  und  $u_i := \lambda_i v_1 + (1-\lambda_i) v_2$ .*

(i) *Es gilt:*

$$D_z^{\nu} p(u_j) = d! \sum_{\substack{|\alpha|=d-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{|\beta|=\nu} c_{\alpha+\beta} B_{\beta}^{\nu}(\zeta) \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} \lambda_j^{\alpha_1} (1-\lambda_j)^{\alpha_2}$$

(ii) *Sei  $j \in \mathbb{N}$  mit  $j+k-1 \leq d-\nu$  und*

$$I = \{(i, d-\nu-i, \nu) : i = j, \dots, j+k-1\}$$

*dann gilt für  $\alpha \in I$ :*

$$c_{\alpha} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i D_z^{\nu} p(u_i) + \sum_{\substack{\alpha_3 \leq \nu \\ \alpha \notin I}} b_{\alpha} c_{\alpha}$$

*mit geeigneten Koeffizienten  $a_i, b_{\alpha} \in \mathbb{R}$ .*

**Beweis:** Aus Satz 2.2 (i) erhält man direkt

$$D_z^\nu p(u_i) = \frac{d!}{(d-\nu)!} \sum_{\substack{|\alpha|=d-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{|\beta|=\nu} c_{\alpha+\beta} B_\beta^\nu(\zeta) \frac{(d-\nu)!}{\alpha_1! \alpha_2!} \lambda_i^{\alpha_1} (1-\lambda_i)^{\alpha_2} \quad (2.1)$$

und somit (i). Da  $z$  nicht parallel zu  $e$  verläuft, gilt  $\zeta_3 \neq 0$ . Wir setzen

$$\gamma_i := \frac{(d-\nu)!}{d! \zeta_3^\nu} D_z^\nu p(u_i) - \frac{1}{\zeta_3^\nu} \sum_{\substack{|\alpha|=d-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{\substack{|\beta|=\nu \\ \alpha+\beta \notin I}} c_{\alpha+\beta} B_\beta^\nu(\zeta) \frac{(d-\nu)!}{\alpha_1! \alpha_2!} \lambda_i^{\alpha_1} (1-\lambda_i)^{\alpha_2}$$

dann folgt aus (2.1):

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \sum_{\mu=j}^{j+k-1} \binom{d-\nu}{\mu} c_{\mu, d-\nu-\mu, \nu} \lambda_i^\mu (1-\lambda_i)^{d-\nu-\mu} \\ &= \lambda_i^j (1-\lambda_i)^{d-\nu-j-k+1} \sum_{\mu=0}^{k-1} \binom{d-\nu}{j+\mu} c_{j+\mu, d-\nu-j-\mu, \nu} \lambda_i^\mu (1-\lambda_i)^{k-1-\mu} \end{aligned}$$

Nun ist  $\{\lambda_i^\mu (1-\lambda_i)^{k-1-\mu} : \mu = 0, \dots, k-1\}$  eine Basis von  $\Pi_{k-1}$ . Da alle  $\lambda_i \neq 0$  und paarweise verschieden sind, besitzt das Gleichungssystem somit eine eindeutige Lösung. Somit folgt (ii).  $\square$

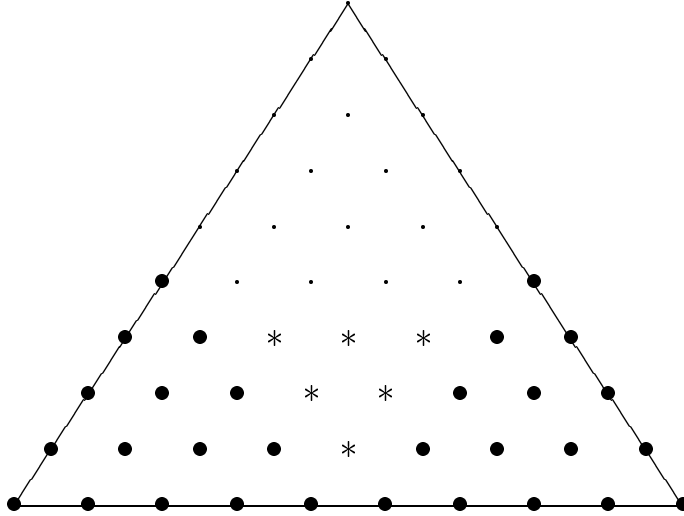


Abbildung 2.3: Interpolation in den Eckpunkten (•) und an den Kanten (\*)

Die Abbildung 2.3 zeigt eine Situation, die für Hermite-Interpolationsverfahren typisch ist. Hier werden die, mit • bezeichneten Koeffizienten durch Ableitungen in den Eckpunkten nach Satz 2.3 bestimmt. Die mit \* gekennzeichneten Koeffizienten ergeben sich anschließend nach Satz 2.4 aus Ableitungen an den Kanten.

## 2.2 Splinefunktionen auf Triangulierungen

In diesem Abschnitt werden wir nun bivariate Splinefunktionen auf Triangulierungen definieren. Wir beschreiben die Bernstein-Bézier-Darstellung für Splinefunktionen und definieren den Begriff der bestimmenden Menge. Diese Mengen stehen in direkter Beziehung zur Dimension des Splineraums.

**Definition 2.5.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Polygon und  $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$  eine Menge von Dreiecken, dann heißt  $\Delta$  *Triangulierung* von  $\Omega$ , wenn gilt

- (i)  $\Omega = \bigcup_{i=1}^N T_i$
- (ii) Zwei verschiedene Dreiecke  $T_i$  und  $T_j$  haben entweder eine gemeinsame Kante, einen gemeinsamen Eckpunkt oder keinen gemeinsamen Punkt.

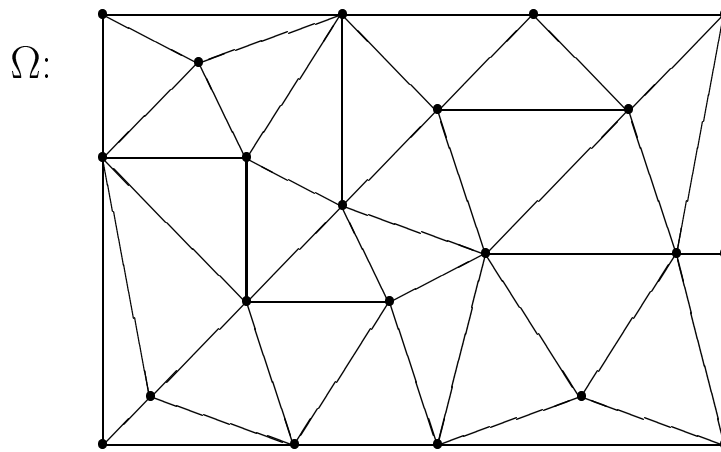


Abbildung 2.4: Triangulierung eines Polygons

Im Folgenden sei  $\mathcal{V}$  die Menge der Eckpunkte und  $\mathcal{E}$  die Menge der Kanten von  $\Delta$ . Weiter bezeichne

- $V_I, V_B, V$  : die Anzahl der inneren, äußeren, aller Eckpunkte
- $E_I, E_B, E$  : die Anzahl der inneren, äußeren, aller Kanten
- $N$  : die Anzahl der Dreiecke
- $S$  : die Anzahl der singulären Eckpunkte

einer Triangulierung  $\Delta$ . Hierbei heißt ein innerer Eckpunkt singulär, wenn er von zwei sich kreuzenden Linien gebildet wird. Es gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} E_B &= V_B \\ N &= V_B + 2V_I - 2 \\ E_I &= V_B + 3V_I - 3 \end{aligned} \tag{2.2}$$

**Definition 2.6.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Polygon und  $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$  eine Triangulierung von  $\Omega$ , dann heißt

$$S_d^r(\Delta) := \left\{ s \in C^r(\Omega) : s|_{T_i} \in \tilde{\Pi}_d, i = 1, \dots, N \right\}$$

der Raum der *bivariaten Splinefunktionen* vom Grad  $d$  auf  $\Delta$ . Seien  $v_1, \dots, v_V$  die Eckpunkte von  $\Delta$ , dann ist für  $\rho \geq r$  durch

$$S_d^{r,\rho}(\Delta) := \{s \in S_d^r(\Delta) : s \in C^\rho(v_i), i = 1, \dots, V\}$$

ein Unterraum von  $S_d^r(\Delta)$ , genannt *Super-Spliner Raum* vom Grad  $d$  definiert.

Eine Funktion  $s \in S_d^r(\Delta)$  besteht somit aus stückweisen bivariaten Polynomen auf den Dreiecken von  $\Delta$ , die an den gemeinsamen Kanten  $r$ -mal stetig-differenzierbar zusammengesetzt sind. Für eine Funktion  $s \in S_d^{r,\rho}(\Delta)$  wird zusätzlich gefordert, dass in jedem Eckpunkt  $v_i$  alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $\rho$  existieren. Ibrahim und Schumaker [85] definieren Super-Splineräume allgemeiner und lassen sogar unterschiedliche Differenzierbarkeitsordnungen in den Eckpunkten der Triangulierung zu.

Da  $s|_{T_i}$  ein Polynom ist, kann es nach Abschnitt 2.1 eindeutig in der Bernstein-Bézier-Darstellung

$$s|_{T_i}(v) = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha^i B_\alpha^d(\lambda_i(v))$$

geschrieben werden. Der Spline  $s$  lässt sich deshalb durch sein Bernstein-Bézier-Netz

$$\{(P_\alpha^i, c_\alpha^i) : |\alpha| = d, i = 1, \dots, N\}$$

darstellen. Wir setzen nun

$$\mathcal{P} := \{P_\alpha^i : |\alpha| = d, i = 1, \dots, N\}$$

für die Menge aller Bernstein-Bézier-Punkte der Triangulierung  $\Delta$ . Ist  $v_i$  ein Eckpunkt von  $\Delta$  und  $T_{i_1}, \dots, T_{i_n}$  die Dreiecke mit Eckpunkt  $v_i$ , dann wollen wir mit

$$\Delta_{v_i} := \{T_{i_1}, \dots, T_{i_n}\}$$

die Zelle um  $v_i$  bezeichnen. Weiter sei  $R_k(v_i)$  die Menge aller Bernstein-Bézier-Punkte in der Zelle  $\Delta_{v_i}$  mit einem 'Abstand'  $k$  zum Eckpunkt  $v_i$  (siehe Alfeld und Schumaker [12] und Ibrahim und Schumaker [85]). Die Scheibe  $D_k(v_i)$  um den Eckpunkt  $v_i$  erhalten wir durch:

$$D_k(v_i) := \bigcup_{j=0}^k R_j(v_i)$$

**Definition 2.7.** Eine Menge  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$  heißt *bestimmende Menge* von  $S_d^{r,\rho}(\Delta)$  auf  $\mathcal{A}$ , wenn für alle  $s \in S_d^{r,\rho}(\Delta)$  gilt:

$$c_\alpha^i = 0 \quad \forall P_\alpha^i \in \mathcal{D} \implies c_\alpha^i = 0 \quad \forall P_\alpha^i \in \mathcal{A}$$

$\mathcal{D}$  heißt *minimale bestimmende Menge* von  $S_d^{r,\rho}(\Delta)$  auf  $\mathcal{A}$ , wenn es keine bestimmende Menge mit weniger Elementen gibt. Gilt  $\mathcal{A} = \mathcal{P}$ , dann heißt  $\mathcal{D}$  (minimale) bestimmende Menge von  $S_d^{r,\rho}(\Delta)$ .

Wie Alfeld und Schumaker [12] gezeigt haben gilt der folgende wichtige Zusammenhang zwischen der Anzahl einer bestimmenden Menge und der Dimension des zugehörigen Splineraums.

**Lemma 2.8.** Für jede bestimmende Menge  $\mathcal{D}$  von  $S_d^{r,\rho}(\Delta)$  gilt  $\dim S_d^{r,\rho}(\Delta) \leq |\mathcal{D}|$  und  $\dim S_d^{r,\rho}(\Delta) = |\mathcal{D}|$  genau dann, wenn  $\mathcal{D}$  minimal ist.

Die Bernstein-Bézier-Koeffizienten einer minimalen bestimmenden Menge definieren somit eindeutig einen Spline  $s \in S_d^{r,\rho}(\Delta)$ . Es genügt deshalb, eine minimale bestimmende Menge des Splineraums anzugeben. Mit Hilfe der Differenzierbarkeitsbedingungen nach Satz 2.2 kann in der Regel gezeigt werden, ob eine Menge  $\mathcal{D}$  eine bestimmende Menge ist. Die Minimalität folgt nach Lemma 2.8, wenn die Dimension des Splineraums bekannt ist. Hierzu gibt es einige wichtige Sätze von Schumaker [128, 130] über die Dimension von Zellen und Splineräumen, die wir hier aufführen möchten.

**Satz 2.9.** Sei  $v_i$  ein Eckpunkt und  $\Delta_{v_i} := \{T_{i_1}, \dots, T_{i_n}\}$ . Weiter gelte  $2\rho + 1 \leq d$ .

(i) Ist  $v_i$  ein äußerer Eckpunkt, dann gilt

$$\dim S_d^{r,\rho}(\Delta_{v_i}) = \binom{d+2}{2} + (n-1) \left[ \binom{d-r+1}{2} - 2 \binom{\rho-r+1}{2} \right]$$

(ii) Ist  $v_i$  ein innerer Eckpunkt und  $e_i$  die Anzahl der inneren Kanten mit unterschiedlicher Steigung im Eckpunkt  $v_i$ , dann gilt

$$\dim S_d^{r,\rho}(\Delta_{v_i}) = \binom{\rho+2}{2} + n \left[ \binom{d-r+1}{2} - 2 \binom{\rho-r+1}{2} \right] + \sigma_i$$

mit

$$\sigma_i := \sum_{j=\rho-r+1}^{d-r} (r+j+1 - je_i)_+$$

Für  $\rho = r$  gilt Satz 2.9 auch für alle  $r < d$  (siehe Schumaker [128]). Mit dem Ergebnis aus Satz 2.9 hat Schumaker [128, 130] eine untere Schranke für die Dimension des Splineraums  $S_d^{r,\rho}(\Delta)$  bestimmt (siehe auch Chui und He [33]).

**Satz 2.10.** *Sei  $e_i$  die Anzahl der Kanten mit unterschiedlicher Steigung im Eckpunkt  $v_i$ , dann gilt für  $2\rho + 1 \leq d$*

$$\begin{aligned} \dim S_d^{r,\rho}(\Delta) &\geq \binom{d+2}{2} - \left[ \binom{d+2}{2} - \binom{\rho+2}{2} \right] V_I \\ &\quad + \left[ \binom{d-r+1}{2} - 2 \binom{\rho-r+1}{2} \right] E_I + \sum_{i=1}^V \sigma_i \end{aligned}$$

mit

$$\sigma_i := \begin{cases} \sum_{j=\rho-r+1}^{d-r} (r+j+1 - je_i)_+ & v_i \text{ innerer Eckpunkt} \\ 0 & v_i \text{ äußerer Eckpunkt} \end{cases}$$

Auch für die untere Schranke hat Schumaker [128] gezeigt, dass im Fall  $\rho = r$  die Aussage aus Satz 2.10 für alle  $r < d$  gilt. Ibrahim und Schumaker [85] haben bewiesen, dass für  $d \geq 3r + 2$  in Satz 2.10 die Gleichheit gilt. Für  $d < 3r + 2$  gibt es keine allgemeinen Aussagen. Den Fall  $S_4^1(\Delta)$  haben Alfeld, Piper und Schumaker [11] untersucht. Auch für diesen Splineraum gilt in Satz 2.10 die Gleichheit. Ebenso konnten Alfeld und Schumaker [13] dies für alle nicht-degenerierten Triangulierungen im Fall  $d = 3r + 1$  zeigen. Weitere Aussagen über die Dimension von bivariaten Splineräumen finden sich beispielsweise bei Billera [20], de Boor und Höllig [24], Chui und He [33], Chui und Wang [41, 42, 43], Hong [81], Morgan und Scott [106] und Wang [140]. Es wurden auch verschiedene Ergebnisse über obere Schranken der Dimension vorgestellt (siehe Alfeld [6], Chui und He [33] und Schumaker [129]). Bei diesen Schranken spielt jedoch die Nummerierung der Eckpunkte eine wichtige Rolle. Im Allgemeinen ist deshalb die untere Schranke aus Satz 2.10 die wichtigere. Es sind auch nur für  $d \leq 2r$  Beispiele bekannt, in denen die Dimension über der unteren Schranke liegt (siehe Alfeld [4, 5], Chou, Su und Wang [30], Diener [53], Gmelig Meyling und Pfluger [74, 75] und Morgan und Scott [107]).

## Kapitel 3

# Hermite-Interpolation auf Triangulierungen

In den letzten 30 Jahren wurden verschiedene Hermite-Interpolationsverfahren mit bi-variater Splines auf Triangulierungen entwickelt. Eine wichtige Gruppe sind Methoden mit finiten Elementen. Sie sind einfach zu beschreiben und zeichnen sich durch eine hohe Approximationsgüte aus. Allerdings wird für die Interpolation auf beliebigen Triangulierungen ein hoher Grad des Splineraums benötigt. Eine Aussage von Farin [64] besagt, dass der Grad  $d$  mindestens  $4r + 1$  betragen muss. Zudem werden in jedem Eckpunkt von  $\Delta$  Ableitungen bis zur Ordnung  $\rho = 2r$  verlangt.

Will man einen kleineren Grad  $d$  wählen, so kann man durch Unterteilen der Dreiecke spezielle Triangulierungen konstruieren. Hier wurden in der Vergangenheit verschiedene Unterteilungsmethoden entwickelt. Eine Methode ist der Clough-Tocher Split [45], bei dem jedes Dreieck  $\Delta(v_1, v_2, v_3)$  in drei kleinere Dreiecke geteilt wird. Diese erhält man, indem drei Kanten von den Eckpunkten zum Baryzentrum des Dreiecks eingezeichnet werden (siehe Abbildung 3.1). Für den Clough-Tocher Split kann man einen  $C^1$ -Interpolanten vom Grad 3 beschreiben (siehe Clough und Tocher [45], Farin [64], Percell [119] und Strang und Fix [137]). Dieser ist durch Funktionswert und partielle Ableitungen in jedem Eckpunkt, sowie die orthogonale Ableitung im Mittelpunkt jeder Kante eindeutig bestimmt. Für beliebige Differenzierbarkeitsordnung  $r$  haben Laghchim-Lahlou und Sablonnière [90] und Sablonnière [125] den Clough-Tocher Split untersucht. Laghchim-Lahlou und Sablonnière zeigten, dass für die Interpolation mit Elementen vom Clough-Tocher Typ ein Grad  $d = 3r$  für ungerade  $r$  und  $d = 3r + 1$  für gerade  $r$  ausreicht. Zudem werden in jedem Eckpunkt nur Ableitungen bis zur Ordnung  $\rho = \lfloor \frac{3r}{2} \rfloor$  benötigt.

Eine andere Unterteilungsmethode ist der Powell-Sabin Split [121], bei dem jedes Dreieck in sechs Mikro-Dreiecke geteilt wird. Sablonnière [125] hat für den Powell-Sabin Split einen Interpolanten im Splineraum  $S_{3r-1}^r(\Delta)$  bestimmt. Insbesondere erhält man mit der Unterteilung nach Powell-Sabin einen  $C^1$ -Interpolanten vom Grad 2, der nur

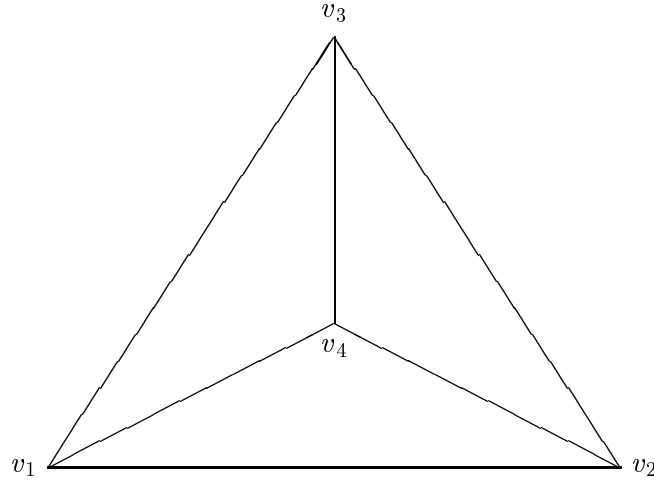


Abbildung 3.1: Unterteilung nach Clough-Tochter

Funktionswert und partielle Ableitungen erster Ordnung in den Eckpunkten benötigt. Unterteilungsmethoden für  $C^2$ -Splines wurden beispielsweise von Alfeld [3], Gao [71], Lai [97] und Wang [141] beschrieben. Ihre Unterteilungen benötigen bis zu neun Mikro-Dreiecke in jedem Dreieck von  $\Delta$ .

Alle diese Unterteilungsmethoden haben den Nachteil, dass jedes Dreieck unterteilt werden muss und somit die Anzahl der Dreiecke durch die Unterteilung stark wächst. Wir werden zeigen, dass man nur wenige Dreiecke unterteilen muss, wenn man den Interpolanten schrittweise berechnet. Dieses Verfahren beschreiben wir hier ausführlich für eine Unterteilung mit Clough-Tochter Elementen. Hierzu entwickeln wir ein Interpolationsverfahren mit  $C^r$ -Splines für beliebige Differenzierbarkeitsordnung  $r$ . Bei unserer Unterteilungsmethode müssen wir maximal ein Dreieck für jeden inneren Eckpunkt unterteilen. Im Allgemeinen genügt sogar ein Split für zwei innere Eckpunkte. Der folgende Abschnitt beschreibt unser Interpolationsverfahren und liefert einen Beweis für die Approximationsordnung des Interpolanten. Im zweiten Abschnitt untersuchen wir die Frage, wieviele Dreiecke für unser Interpolationsverfahren unterteilt werden müssen. Hier geben wir eine Charakterisierung für eine Unterteilung mit einer minimalen Anzahl von Clough-Tochter Elementen und entwickeln hieraus effiziente Unterteilungsalgorithmen.

### 3.1 Unterteilungen mit Clough-Tochter Elementen

Bei unserer Methode wird der Spline für eine gegebene Reihenfolge der Dreiecke iterativ berechnet. Im Gegensatz zu den Methoden mit finiten Elementen wählen wir nicht die



gleichen Interpolationsbedingungen auf allen Dreiecken der Triangulierung. Die Bedingungen auf einem Dreieck  $T_i$  hängen vielmehr von der Anzahl der gemeinsamen Kanten mit der Teiltriangulierung  $\Delta_{i-1} := \{T_1, \dots, T_{i-1}\}$  ab. Hat das Dreieck mindestens zwei gemeinsame Kanten mit der Teiltriangulierung  $\Delta_i$ , so muss dieses Dreieck unterteilt werden. Andernfalls würde man nach Farin [64] in dem Eckpunkt der beiden Kanten eine Differenzierbarkeitsordnung  $\rho = 2r$  und somit einen Grad von  $d \geq 4r + 1$  benötigen. Andererseits ist keine Unterteilung nötig, wenn das Dreieck  $T_i$  maximal eine Kante mit der Teiltriangulierung  $\Delta_{i-1}$  gemeinsam hat.

Im Folgenden sei  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\rho = \lfloor \frac{3r}{2} \rfloor$  und  $d = 2\rho + 1$ .  $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$  bezeichne eine Triangulierung eines zusammenhängenden Gebiets  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ . Wir setzen  $\theta_i$  für die Anzahl der gemeinsamen Kanten von  $T_i$  und  $\Delta_{i-1}$ , d. h. es gilt:

$$\theta_i := |\{j : e_j \text{ ist gemeinsame Kante von } T_j \text{ und } T_i \text{ mit } j < i\}|$$

Weiter definieren wir für  $k = 0, 1, 2, 3$ :

$$\Theta_k := |\{T_i \in \Delta : \theta_i = k\}|$$

Somit liefert uns  $\Theta_2 + \Theta_3$  die Anzahl der Clough-Tocher Elemente für unsere Unterteilungsmethode. Wir wollen annehmen, dass die Eckpunkte  $v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}$  des Dreiecks  $T_i$  so nummeriert sind, dass das benachbarte Dreieck mit dem niedrigsten Index die gemeinsame Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  besitzt. Falls vorhanden, soll das Dreieck mit dem nächst höheren Index an der Kante  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$  liegen. Weiter seien die drei Subdreiecke des Clough-Tocher Splits durch

$$\begin{aligned} T_{i,1} &:= \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,4}) \\ T_{i,2} &:= \Delta(v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4}) \\ T_{i,3} &:= \Delta(v_{i,3}, v_{i,1}, v_{i,4}) \end{aligned}$$

definiert, wobei  $v_{i,4}$  das Baryzentrum von  $T_i$  bezeichnet. Zu  $\Delta_i$  erhalten wir nun die Triangulierung

$$\tilde{\Delta}_i := \bigcup_{\substack{j=1 \\ \theta_j \leq 1}}^i T_j \cup \bigcup_{\substack{j=1 \\ \theta_j \geq 2}}^i \{T_{j,1}, T_{j,2}, T_{j,3}\}$$

Somit entsteht  $\tilde{\Delta}_i$  aus  $\Delta_i$ , indem wir jedes Dreieck  $T_j$  mit  $\theta_j \geq 2$  durch einen Clough-Tocher Split ersetzen. Mit  $\tilde{\Delta} := \tilde{\Delta}_N$  bezeichnen wir die gesamte Triangulierung, die wir durch die Unterteilung der Dreiecke erhalten.

### 3.1.1 Konstruktion einer bestimmenden Menge

Wir werden zunächst eine bestimmende Menge für den Splineraum  $S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta})$  beschreiben. Aus dieser bestimmenden Menge werden wir anschließend einen Hermite-Interpolanten ableiten. Hierzu betrachten wir zunächst die einzelnen Dreiecke von  $\Delta$ .

**Lemma 3.1.** Sei  $T_i \in \Delta$  mit  $\theta_i \leq 1$ ,  $\mathcal{D}_{i-1}$  eine bestimmende Menge von  $\tilde{\Delta}_{i-1}$  und

$$\tilde{\mathcal{D}}_i := \begin{cases} \{P_\alpha^i : |\alpha| = d\} & \text{falls } \theta_i = 0 \\ \{P_\alpha^i : |\alpha| = d; \alpha_1, \alpha_2 < d - \rho; \alpha_3 > r\} & \text{falls } \theta_i = 1 \end{cases}$$

Dann ist  $\mathcal{D}_i := \mathcal{D}_{i-1} \cup \tilde{\mathcal{D}}_i$  eine bestimmende Menge von  $S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta}_i)$ .

**Beweis:** Die Behauptung für  $\theta_i = 0$  folgt unmittelbar, da alle Bernstein-Bézier-Punkte von  $T_i$  in  $\mathcal{D}_i$  enthalten sind. Sei nun  $\theta_i = 1$  und alle Koeffizienten der Bernstein-Bézier-Punkte aus  $\mathcal{D}_i$  gleich 0. Da  $\mathcal{D}_{i-1}$  eine bestimmende Menge von  $\tilde{\Delta}_{i-1}$  ist, sind alle Koeffizienten  $c_\alpha^j$  der Bernstein-Bézier-Punkte aus  $\tilde{\Delta}_{i-1}$  gleich 0. Nach Voraussetzung ist  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  eine gemeinsame Kante von  $T_i$  und  $\tilde{\Delta}_{i-1}$ . Für  $P_\alpha^i \notin \mathcal{D}_i$  gilt nun  $\alpha_1 \geq d - \rho$ ,  $\alpha_2 \geq d - \rho$  oder  $\alpha_3 \leq r$ . Da  $v_{i,1}$  und  $v_{i,2}$  Eckpunkte der Teiltriangulierung  $\tilde{\Delta}_{i-1}$  sind, folgt für die ersten beiden Fällen  $c_\alpha^i = 0$  nach Satz 2.2 (ii). Im dritten Fall folgt dies aus der  $C^r$ -Bedingung über die Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  nach Satz 2.2 (iii).  $\square$

Für den Fall  $\theta_i \geq 2$  benötigen wir die beiden folgenden Aussagen. Das erste Lemma wurde in ähnlicher Form auch von Ibrahim und Schumaker [85] und Laghchim-Lahlou und Sablonnière [90, 91] bewiesen. Wir liefern hier aber zusätzlich eine Abschätzung für die Bernstein-Bézier-Koeffizienten, die wir zum Beweis der Approximationsordnung benötigen.

**Lemma 3.2.** Es seien  $T_1 = \triangle(v_1, v_2, v_3)$  und  $T_2 = \triangle(v_1, v_2, v_4)$  zwei Dreiecke, so dass alle Kanten paarweise nicht kollinear sind. Weiter seien  $k = \lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor$  und  $I = \{r - 2k + 1, \dots, r - k\}$ . Dann ist für  $\rho < m \leq d$  die Menge

$$\mathcal{D} := \{P_\alpha^i : \alpha_1 \neq 0 \text{ oder } \alpha_3 \notin I, i = 1, 2\}$$

eine bestimmende Menge von  $S_m^r(\{T_1, T_2\})$ . Sei  $s \in S_m^r(\{T_1, T_2\})$  in der Bernstein-Bézier-Darstellung

$$s|_{T_i}(v) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^i B_\alpha^m(\lambda(v))$$

$(\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \lambda_{1,3})$  die baryzentrischen Koordinaten von  $v_4$  bezüglich  $T_1$  und  $(\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}, \lambda_{2,3})$  die baryzentrischen Koordinaten von  $v_3$  bezüglich  $T_2$ , dann gilt für  $|\alpha| = m$  und  $j = 1, 2$ :

$$|c_\alpha^j| \leq K \max \{|c_\alpha^i| : P_\alpha^i \in \mathcal{D}, i = 1, 2\} \lambda^{r+1}$$

mit

$$\lambda := \frac{\max \{|\lambda_{i,j}| : i = 1, 2; j = 1, 2, 3\}}{\min \{|\lambda_{i,j}| : i = 1, 2; j = 1, 2, 3\}}$$

wobei die Konstante  $K$  nur von  $r$  abhängt.

**Beweis:** Wir setzen:

$$\lambda_{\max} = \max \{ |\lambda_{i,j}| : i = 1, 2; j = 1, 2, 3 \}$$

$$\lambda_{\min} = \min \{ |\lambda_{i,j}| : i = 1, 2; j = 1, 2, 3 \}$$

Wegen  $\lambda_{2,3} = 1/\lambda_{1,3}$  gilt  $\lambda_{\max} \geq 1$  und  $0 < \lambda_{\min} \leq 1$ . Aus der  $C^r$ -Bedingung über die Kante  $\overline{v_1 v_2}$  folgt nach Satz 2.2 für  $j = r - k + 1, \dots, r$  und  $\alpha = (0, m - j, j)$ :

$$c_\alpha^2 = \sum_{|\beta|=\alpha_3} c_{(\alpha_1, \alpha_2, 0)+\beta}^1 \frac{a_3!}{\beta_1! \beta_2! \beta_3} \lambda_{1,1}^{\beta_1} \lambda_{1,2}^{\beta_2} \lambda_{1,3}^{\beta_3}$$

Setzt man

$$B := \begin{pmatrix} \binom{r-k+1}{r-2k+1} \lambda_{1,2}^k \lambda_{1,3}^{r-2k+1} & \cdots & \binom{r-k+1}{r-k} \lambda_{1,2} \lambda_{1,3}^{r-k} \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{r}{r-2k+1} \lambda_{1,2}^{2k-1} \lambda_{1,3}^{r-2k+1} & \cdots & \binom{r}{r-k} \lambda_{1,2}^k \lambda_{1,3}^{r-k} \end{pmatrix}$$

$$c := \left( c_{0, m-(r-2k+1), r-2k+1}^1, \dots, c_{0, m-(r-k), r-k}^1 \right)$$

$$\gamma := (\gamma_{r-k+1}, \dots, \gamma_r)$$

mit

$$\gamma_j := c_{0, m-j, j}^2 - \sum_{\substack{|\beta|=j \\ \beta_3 \notin I \text{ oder } \beta_1 \neq 0}} c_{(0, m-j, 0)+\beta}^1 \frac{j!}{\beta_1! \beta_2! \beta_3} \lambda_{1,1}^{\beta_1} \lambda_{1,2}^{\beta_2} \lambda_{1,3}^{\beta_3}$$

dann gilt  $Bc = \gamma$ . Sei

$$C := \det \begin{pmatrix} \binom{r}{r-2k+1} & \cdots & \binom{r}{r-k} \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{r-k+1}{r-2k+1} & \cdots & \binom{r-k+1}{r-k} \end{pmatrix}$$

dann ist  $C \neq 0$  eine Konstante, die nur von  $r$  abhängt und es gilt

$$\det B = C \prod_{\nu=1}^k \lambda_{1,2}^\nu \prod_{\nu=0}^{k-1} \lambda_{1,2}^\nu \prod_{\nu=r+1-2k}^{r-k} \lambda_{1,3}^\nu = C \lambda_{1,2}^{k^2} \lambda_{1,3}^{\frac{(r-k+1)(r-k)}{2}}$$

Da  $\overline{v_1 v_3}$  und  $\overline{v_1 v_4}$  nicht kollinear sind, gilt  $\lambda_{1,2}, \lambda_{1,3} \neq 0$ , so dass  $\det B \neq 0$  folgt. Also ist  $\mathcal{D}$  eine bestimmende Menge. Sei nun  $B_{ij}$  die Matrix, die man durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte aus  $B$  erhält und  $C_{ij}$  definiert durch

$$C_{ij} := \det \begin{pmatrix} \binom{r}{r-2k+1} & \cdots & \binom{r}{r-2k+j-1} & \binom{r}{r-2k+j+1} & \cdots & \binom{r}{r-k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{r-i+1}{r-2k+1} & \cdots & \binom{r-i+1}{r-2k+j-1} & \binom{r-i+1}{r-2k+j+1} & \cdots & \binom{r-i+1}{r-k} \\ \binom{r-i-1}{r-2k+1} & \cdots & \binom{r-i-1}{r-2k+j-1} & \binom{r-i-1}{r-2k+j+1} & \cdots & \binom{r-i-1}{r-k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{r-k+1}{r-2k+1} & \cdots & \binom{r-k+1}{r-2k+j-1} & \binom{r-k+1}{r-2k+j+1} & \cdots & \binom{r-k+1}{r-k} \end{pmatrix}$$

dann folgt analog

$$\det B_{ij} = C_{ij} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k+1-i}}^k \lambda_{1,2}^\nu \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k-j}}^{k-1} \lambda_{1,2}^\nu \prod_{\substack{\nu=r+1-2k \\ \nu \neq j}}^{r-k} \lambda_{1,3}^\nu = C_{ij} \lambda_{1,2}^{k^2-(2k+1-i-j)} \lambda_{1,3}^{\frac{(r-k+1)(r-k)}{2}-j}$$

Für die Einträge  $b_{ij}$  von  $B^{-1}$  gilt somit:

$$|b_{ij}| = \frac{|\det B_{ji}|}{|\det B|} = \frac{|C_{ji}|}{|C| |\lambda_{1,2}|^{2k+1-i-j} |\lambda_{1,3}|^j} \leq \frac{K_{ij}}{\min\{|\lambda_{1,2}|, |\lambda_{1,3}|\}^{2k+1-i}} \leq \frac{K_{ij}}{\lambda_{\min}^{r+1}}$$

wobei  $K_{ij} := |C_{ji}|/|C|$  nur von  $r$  abhängt. Weiter gilt

$$\begin{aligned} |\gamma_j| &\leq |c_{0,m-j,j}^2| + \sum_{\substack{|\beta|=j \\ \beta_3 \notin I \text{ oder } \beta_1 \neq 0}} |c_{(0,m-j,0)+\beta}^1| \frac{j!}{\beta_1! \beta_2! \beta_3!} |\lambda_{1,1}|^{\beta_1} |\lambda_{1,2}|^{\beta_2} |\lambda_{1,3}|^{\beta_3} \\ &\leq \max\{|c_\alpha^i| : P_\alpha^i \in \mathcal{D}\} \left(1 + 3^j \max\{|\lambda_{1,1}|, |\lambda_{1,2}|, |\lambda_{1,3}|\}^j\right) \\ &\leq \max\{|c_\alpha^i| : P_\alpha^i \in \mathcal{D}\} (1 + 3^r) \lambda_{\max}^{r+1} \end{aligned}$$

Also folgt:

$$|c_\alpha^1| \leq k \max\{|\gamma_j|\} \max\{|b_{ij}|\} \leq K \max\{|c_\alpha^i| : P_\alpha^i \in \mathcal{D}\} \lambda^{r+1}$$

mit  $K := k(1 + 3^r) \max\{K_{ij}\}$ . Analog zeigt man dies für die Koeffizienten  $c_\alpha^2$ .  $\square$

Die Abbildung 3.2 zeigt die bestimmende Menge aus Lemma 3.2 für die Splineräume  $S_6^3(\{T_1, T_2\})$  und  $S_8^4(\{T_1, T_2\})$ .

Für den Fall  $r$  gerade wählen wir einen höheren Polynomgrad als für ungerade  $r$ . Die minimale bestimmende Menge für den Spliner Raum unterscheidet sich deshalb für die beiden Fälle. Insbesondere benötigen wir in der Scheibe  $D_\rho(v_{i,4})$  des Hilfspunktes  $v_{i,4}$  eines Clough-Tochter Elements einen zusätzlichen Bernstein-Bézier-Punkt. Dies beschreibt das folgende Lemma.

**Lemma 3.3.** *Es seien  $r$  gerade,  $T = \triangle(v_1, v_2, v_3)$ ,  $v_4$  ein Punkt im Innern von  $T$  mit den baryzentrischen Koordinaten  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  und  $T_i = \triangle(v_i, v_{i+1}, v_4)$ <sup>1</sup>. Dann ist*

$$\mathcal{D} := \left\{P_\alpha^i : \alpha_3 < \frac{r}{2}; i = 1, 2, 3\right\} \cup \{v_4\}$$

*eine bestimmende Menge von  $S_\rho^r(\{T_1, T_2, T_3\})$  und es gilt  $S_\rho^r(\{T_1, T_2, T_3\}) = \tilde{\Pi}_\rho$ . Sei  $s \in S_\rho^r(\{T_1, T_2, T_3\})$  und  $c_\alpha$  bzw.  $c_\alpha^i$  die Bernstein-Bézier-Koeffizienten von  $s$  bezüglich dem Dreieck  $T$  bzw.  $T_i$ . Dann gilt:*

$$|c_\alpha| \leq K \max\{|c_\alpha^i| : P_\alpha^i \in \mathcal{D}\} \lambda^\rho$$

---

<sup>1</sup>Für  $i = 3$  ist hier  $i + 1$  gleich 1 zu verstehen. Diese Konvention verwenden wir auch im Folgenden, ohne dass wir dies explizit angeben.

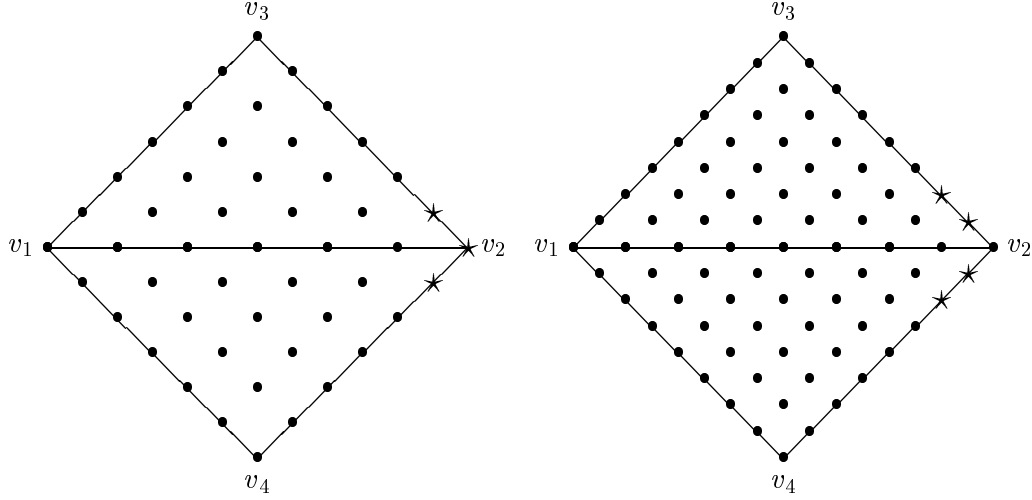


Abbildung 3.2: Bestimmende Menge von  $S_6^3(\{T_1, T_2\})$  und  $S_8^4(\{T_1, T_2\})$

mit

$$\lambda := \max \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3} \right\}$$

wobei  $K$  nur von  $r$  abhängt.

**Beweis:** Zunächst gilt nach Satz 2.9

$$\dim S_\rho^r(\{T_1, T_2, T_3\}) = \binom{\rho+2}{2} = \dim \tilde{\Pi}_\rho$$

und somit  $S_\rho^r(\{T_1, T_2, T_3\}) = \tilde{\Pi}_\rho$ . Sei  $s \in S_\rho^r(\{T_1, T_2, T_3\})$  und  $c_\alpha^i = 0$  für  $P_\alpha^i \in \mathcal{D}$ . Nach Satz 2.4 folgt  $D_z^\nu(v) = 0$ ,  $\nu = 0, \dots, \frac{r}{2} - 1$  für alle  $v \in \overline{v_i v_{i+1}}$  und alle Richtungsvektoren  $z$ . Sind  $l_i(v) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  die Geradengleichungen der Kanten von  $T$ , dann gilt wegen  $s \in \tilde{\Pi}_\rho$

$$s(v) = q(v) (l_1(v)l_2(v)l_3(v))^{\frac{r}{2}}$$

mit  $q \in \tilde{\Pi}_0$ . Nun gilt

$$0 = s(v_4) = q(v_4) (l_1(v_4)l_2(v_4)l_3(v_4))^{\frac{r}{2}}$$

Da  $v_4$  auf keiner Kante von  $T$  liegt, folgt  $l_i(v_4) \neq 0$ , so dass wir  $q(v_4) = 0$  und somit  $s = 0$  erhalten. Also ist  $\mathcal{D}$  eine bestimmende Menge.

Sei nun  $\sum_{|\alpha|=\rho} c_\alpha B_\alpha^\rho(\mu)$  die Bernstein-Bézier-Darstellung von  $s$ , dann gilt nach Satz 2.4 für einen Richtungsvektor  $z$  nicht parallel zur Kante  $\overline{v_1 v_2}$  und  $v = \mu v_1 + (1 - \mu)v_2$ :

$$\begin{aligned} D_z^\nu s(v) &= \frac{\rho!}{(\rho - \nu)!} \sum_{\substack{|\alpha|=\rho-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{|\beta|=\nu} c_{\alpha+\beta} B_\beta^\nu(\zeta) B_\alpha^{\rho-\nu}((\mu, 1 - \mu, 0)) \\ &= \frac{\rho!}{(\rho - \nu)!} \sum_{\substack{|\alpha|=\rho-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{|\beta|=\nu} c_{\alpha+\beta}^1 B_\beta^\nu(\tilde{\zeta}) B_\alpha^{\rho-\nu}((\mu, 1 - \mu, 0)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

wobei  $\zeta$  und  $\tilde{\zeta}$  die baryzentrischen Richtungsvektoren von  $z$  bezüglich  $T$  bzw.  $T_1$  bezeichnen. Wir beweisen nun durch Induktion nach  $\nu = 0, \dots, \frac{r}{2} - 1$ , dass alle  $c_\alpha$  mit  $\alpha_3 \leq \nu$  die Ungleichung

$$|c_\alpha| \leq K_\nu \max \{ |c_\alpha^1| : \alpha_3 \leq \nu \} \frac{1}{\lambda_3^\nu} \quad (3.2)$$

erfüllen, wobei die Konstante  $K_\nu$  nur von  $r$  abhängt. Für  $\nu = 0$  ergibt sich aus (3.1)

$$\sum_{\substack{|\alpha|=\rho \\ \alpha_3=0}} c_\alpha B_\alpha^\rho((\mu, 1 - \mu, 0)) = \sum_{\substack{|\alpha|=\rho \\ \alpha_3=0}} c_\alpha^1 B_\alpha^\rho((\mu, 1 - \mu, 0))$$

mit  $\mu \in [0, 1]$ . Somit gilt also  $c_\alpha = c_\alpha^1$ , so dass (3.2) mit  $K_0 = 1$  erfüllt ist. Die Behauptung gelte nun für  $k = 0, \dots, \nu - 1$ . Seien  $\mu_0, \dots, \mu_{\rho-\nu} \in [0, 1]$  paarweise verschieden und  $\gamma_0, \dots, \gamma_{\rho-\nu}$  definiert durch

$$\begin{aligned} \gamma_i &:= \sum_{\substack{|\alpha|=\rho-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{|\beta|=\nu} c_{\alpha+\beta}^1 B_\beta^\nu(\tilde{\zeta}) B_\alpha^{\rho-\nu}((\mu_i, 1 - \mu_i, 0)) \\ &\quad - \sum_{\substack{|\alpha|=\rho-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{\substack{|\beta|=\nu \\ \beta_3 < \nu}} c_{\alpha+\beta} B_\beta^\nu(\zeta) B_\alpha^{\rho-\nu}((\mu_i, 1 - \mu_i, 0)) \end{aligned}$$

dann erhalten wir aus (3.1) das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\rho-\nu, 0, \nu} \\ \vdots \\ c_{0, \rho-\nu, \nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{\rho-\nu} \end{pmatrix}$$

mit

$$b_{ij} := \binom{\rho - \nu}{\rho - \nu - j} \mu_i^{\rho-\nu-j} (1 - \mu_i)^j \zeta_3^\nu$$

Bezeichnen wir mit  $\tilde{b}_{ij}$  die Elemente der Inverse der Koeffizientenmatrix, dann ergibt sich analog zum Beweis aus Lemma 3.2

$$|\tilde{b}_{ij}| \leq \frac{C}{\zeta_3}$$

mit einer Konstante  $C$ , die nur von  $r$  abhängt. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Konstante  $K_{\nu-1}$  mit

$$\max \{ |c_\alpha| : \alpha_3 < \nu \} \leq K_{\nu-1} \max \{ |c_\alpha^1| : \alpha_3 < \nu \} \frac{1}{\lambda_3^{\nu-1}}$$

Da (3.1) für jeden Vektor  $\zeta$  mit  $\zeta_3 \neq 0$  gilt, können wir  $\zeta := (-\zeta_1, -\zeta_2, 1)$  mit  $\zeta_1, \zeta_2 \geq 0$  und  $\zeta_1 + \zeta_2 = 1$  setzen. Hieraus ergibt sich

$$\tilde{\zeta} = \left( -\frac{\zeta_1 \lambda_3 + \lambda_1}{\lambda_3}, -\frac{\zeta_2 \lambda_3 + \lambda_2}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_3} \right)$$

so dass

$$\max \{ |\tilde{\zeta}_i| : i = 1, 2, 3 \} = \frac{1}{\lambda_3}$$

gilt. Wegen  $0 < \lambda_3 \leq 1$  folgt:

$$\begin{aligned} |\gamma_i| &\leq \sum_{\substack{|\alpha|=\rho-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{|\beta|=\nu} |c_{\alpha+\beta}^1| \max \{ |\tilde{\zeta}_i| : i = 1, 2, 3 \}^\nu + \sum_{\substack{|\alpha|=\rho-\nu \\ \alpha_3=0}} \sum_{\substack{|\beta|=\nu \\ \beta_3 < \nu}} |c_{\alpha+\beta}| \\ &\leq (K_{\nu-1} + 1)(\rho - \nu + 1) \binom{\nu+2}{2} \max \{ |c_\alpha^1| : \alpha_3 \leq \nu \} \frac{1}{\lambda_3^\nu} \end{aligned}$$

Setzt man

$$K_\nu := C(K_{\nu-1} + 1)(\rho - \nu + 1)^2 \binom{\nu+2}{2}$$

dann folgt (3.2). Analog zeigt man die Aussage für  $T_2$  und  $T_3$ , so dass

$$|c_\alpha| \leq K_{\frac{r}{2}-1} \max \{ |c_\alpha^i| : P_\alpha^i \in \mathcal{D} \} \lambda^{\frac{r}{2}-1}$$

für alle  $\alpha \neq (\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, \frac{r}{2})$  gilt. Schließlich ergibt sich aus

$$c_{00\rho}^i = s(\lambda) = \sum_{|\alpha|=\rho} c_\alpha B_\alpha^\rho(\lambda)$$

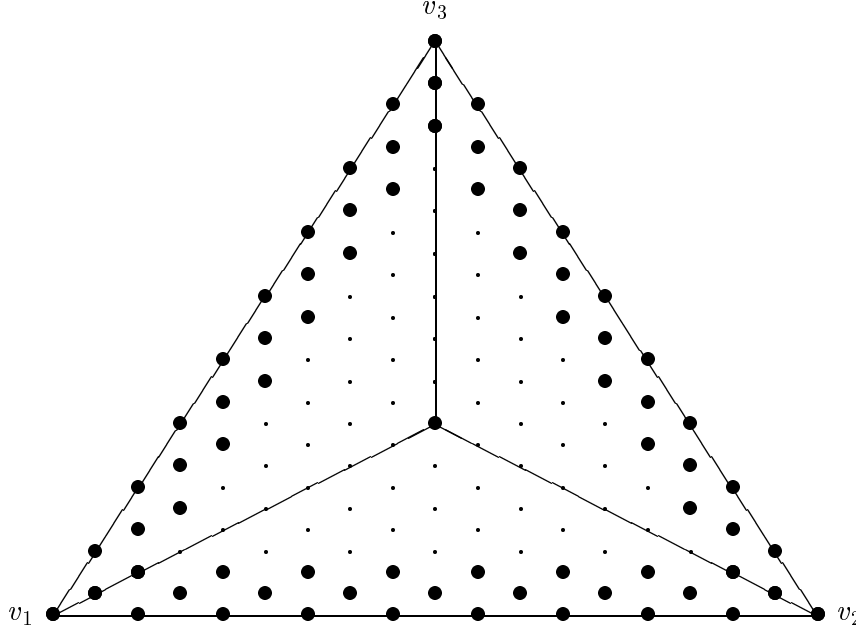
mit (3.2):

$$|c_{\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, \frac{r}{2}}| \leq |c_{00\rho}^i| \lambda^\rho + \binom{\rho+2}{2} K_{\frac{r}{2}-1} \max \{ |c_\alpha^i| : P_\alpha^i \in \mathcal{D} \} \lambda^r$$

Mit  $K := 1 + \binom{\rho+2}{2} K_{\frac{r}{2}-1}$  erhält man

$$|c_\alpha| \leq \max \{ |c_\alpha| : |\alpha| = \rho \} \leq K \max \{ |c_\alpha^i| : P_\alpha^i \in \mathcal{D} \} \lambda^\rho$$

wobei  $K$  nur von  $r$  abhängt. □

Abbildung 3.3: Bestimmende Menge von  $S_9^6(\{T_1, T_2, T_3\})$ 

Die Abbildung 3.3 zeigt die bestimmende Menge aus Lemma 3.3 für den Splineraum  $S_9^6(\{T_1, T_2, T_3\})$ .

Mit Hilfe von Lemma 3.2 und 3.3 kann nun eine bestimmende Menge für die Dreiecke  $T_i$  mit  $\theta_i \geq 2$  angegeben werden.

**Lemma 3.4.** *Es seien  $T_i \in \Delta$  mit  $\theta_i \geq 2$ ,  $\mathcal{D}_{i-1}$  eine bestimmende Menge von  $\tilde{\Delta}_{i-1}$  und  $\mathcal{A}_{i,j}$ ,  $\mathcal{B}_{i,j}$ ,  $\mathcal{C}_{i,j}$ ,  $j = 1, 2, 3$  definiert durch*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{i,j} &:= \{P_\alpha^{i,j} : |\alpha| = d; \alpha_1, \alpha_2 < d - \rho; \alpha_3 \leq r\} \\ \mathcal{B}_{i,j} &:= \left\{P_\alpha^{i,j} : |\alpha| = d; \alpha_1, \alpha_2 > \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor; \alpha_3 > r\right\} \\ \mathcal{C}_{i,j} &:= \{P_\alpha^{i,j} : |\alpha| = d; \alpha_2 = 0; \rho + 1 \leq \alpha_3 \leq \rho + r\}\end{aligned}$$

Man setze

$$\tilde{\mathcal{D}}_i := \begin{cases} \bigcup_{j=1}^3 \mathcal{B}_{i,j} \cup \mathcal{A}_{i,3} & \theta_i = 2 \text{ und } r \text{ ungerade} \\ \bigcup_{j=1}^3 \mathcal{B}_{i,j} & \theta_i = 3 \text{ und } r \text{ ungerade} \\ \bigcup_{j=1}^3 (\mathcal{B}_{i,j} \cup \mathcal{C}_{i,j}) \cup \{v_{i,4}\} \cup \mathcal{A}_{i,3} & \theta_i = 2 \text{ und } r \text{ gerade} \\ \bigcup_{j=1}^3 (\mathcal{B}_{i,j} \cup \mathcal{C}_{i,j}) \cup \{v_{i,4}\} & \theta_i = 3 \text{ und } r \text{ gerade} \end{cases}$$

Dann ist  $\mathcal{D}_i := \mathcal{D}_{i-1} \cup \tilde{\mathcal{D}}_i$  eine bestimmende Menge von  $S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta}_i)$ .



**Beweis:** Es seien alle Koeffizienten der Bernstein-Bézier-Punkte aus  $\mathcal{D}_i$  gleich 0. Nach Voraussetzung gehören die Eckpunkte  $v_{i,1}$ ,  $v_{i,2}$  und  $v_{i,3}$  zur Teiltriangulierung  $\tilde{\Delta}_{i-1}$ . Somit folgt aus der  $C^\rho$ -Bedingung in jedem Eckpunkt, dass alle Koeffizienten der Bernstein-Bézier-Punkte in der Scheibe  $D_\rho(v_{i,j})$ ,  $j = 1, 2, 3$  gleich 0 sind. Aus den  $C^r$ -Bedingungen über die Kanten  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  und  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$  folgt dies auch für die Koeffizienten der Punkte aus  $\mathcal{A}_{i,1}$  und  $\mathcal{A}_{i,2}$ . Für  $\theta_i = 2$  gilt  $\mathcal{A}_{i,3} \subseteq \mathcal{D}_i$  und somit sind nach Voraussetzung alle Koeffizienten der Punkte aus  $\mathcal{A}_{i,3}$  gleich 0. Für  $\theta_i = 3$  gehört die Kante  $\overline{v_{i,3}v_{i,1}}$  zur Teiltriangulierung  $\tilde{\Delta}_{i-1}$ , so dass sich in diesem Fall die Koeffizienten aus der  $C^r$ -Bedingung über die Kante berechnen. Somit sind alle Koeffizienten der Bernstein-Bézier-Punkte aus  $\bigcup_{j=1}^3 (D_\rho(v_{i,j}) \cup \mathcal{A}_{i,j})$  gleich 0.

Die Koeffizienten  $c_\alpha^i$  mit  $\alpha_1, \alpha_2 \geq \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$  berechnen sich nun iterativ, indem man Lemma 3.2 für die Ringe  $R_m(v_{i,j})$ ,  $m = \rho + 1, \dots, \rho + r$  anwendet. Ist  $r$  ungerade, dann lassen sich die verbleibenden Koeffizienten ebenfalls nach Lemma 3.2 mit  $m = \rho + r, \dots, d$  bestimmen. Ist  $r$  gerade, dann ergeben sich die Koeffizienten nach Lemma 3.3.  $\square$

Die Abbildung 3.4 zeigt die Mengen  $\mathcal{A}_{i,j}(\bullet)$ ,  $\mathcal{B}_{i,j}(\star)$  und  $\mathcal{C}_{i,j}(\star)$  für den Fall  $S_{19}^{6,9}(\Delta)$ .

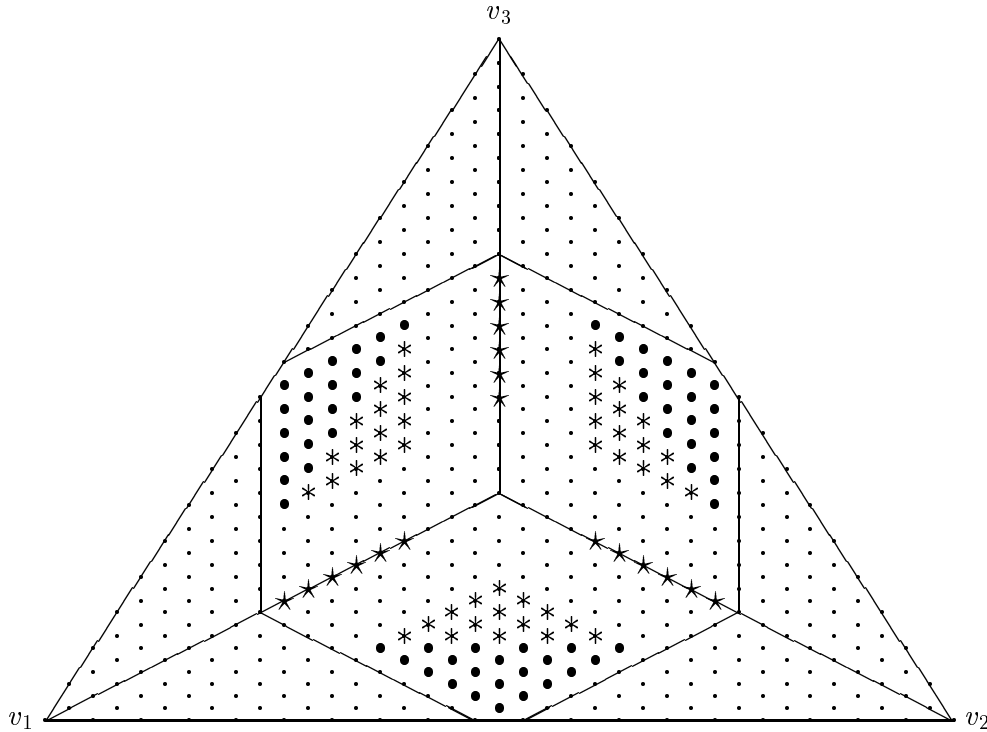


Abbildung 3.4: Bestimmende Menge von  $S_{19}^{6,9}(\Delta)$

Aus Lemma 3.1 und 3.4 erhalten wir nun eine minimale bestimmende Menge  $\mathcal{D}$  für den Splineraum  $S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta})$ . Hierzu konstruieren wir induktiv die Mengen  $\mathcal{D}_i$ ,  $i = 0, \dots, N$  nach dem folgenden Verfahren.

- (i) Wir setzen  $\mathcal{D}_0 := \emptyset$ .
- (ii) Sei  $\mathcal{D}_j$ , für  $0 \leq j < i$  konstruiert. Für  $\theta_i \leq 1$  wählen wir die Menge  $\tilde{\mathcal{D}}_i$  nach Lemma 3.1 und für  $\theta_i \geq 2$  die Menge  $\tilde{\mathcal{D}}_i$  nach Lemma 3.4 und setzen

$$\mathcal{D}_i := \mathcal{D}_{i-1} \cup \tilde{\mathcal{D}}_i$$

- (iii) Schließlich definieren wir  $\mathcal{D} := \mathcal{D}_N$

Wir erhalten nun direkt den folgenden Satz.

**Satz 3.5.** *Sei  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\rho = \lfloor \frac{3r}{2} \rfloor$ ,  $d = 2\rho + 1$  und  $\mathcal{D}$  nach dem oben beschriebenen Verfahren konstruiert. Dann ist  $\mathcal{D}$  eine bestimmende Menge des Splineraums  $S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta})$ .*

### 3.1.2 Hermite-Interpolation und Approximationsgüte

Aus der bestimmenden Menge nach Satz 3.5 können wir nun einen Hermite-Interpolanten für den Splineraum  $S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta})$  herleiten. Es gilt der folgende Satz.

**Satz 3.6.** *Sei  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\rho = \lfloor \frac{3r}{2} \rfloor$ ,  $d = 2\rho + 1$  und  $f \in C^{2r}(\Omega)$ . Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta})$ , der die folgenden Interpolationsbedingungen erfüllt:*

- (i) Für jeden Eckpunkt  $v_i \in \Delta$  und  $\mu + \nu \leq \rho$  gelte:

$$D_x^\mu D_y^\nu s(v_i) = D_x^\mu D_y^\nu f(v_i)$$

- (ii) Für jedes Dreieck  $T_i = \triangle(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$  sei  $e_{i,j} := \overline{v_{i,j} v_{i,j+1}}$ ,  $z_{i,j}$  ein Vektor, der nicht parallel zur Kante  $e_{i,j}$  verläuft und  $w_{i,j}^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, r$  paarweise verschiedene Punkte auf  $e_{i,j}$ .

- (a) Ist  $\theta_i = 0$ , dann gelte für  $1 \leq \mu \leq \nu \leq r$

$$D_{z_{i,1}}^\nu s(w_{i,1}^\mu) = D_{z_{i,1}}^\nu f(w_{i,1}^\mu)$$

- (b) Ist  $\theta_i \in \{0, 1\}$ , dann gelte für  $\rho < \mu + \nu < d - r$  und  $\mu, \nu \geq \mu + \nu - \rho$

$$D_{v_{i,1}-v_{i,3}}^\mu D_{v_{i,2}-v_{i,3}}^\nu s(v_{i,3}) = D_{v_{i,1}-v_{i,3}}^\mu D_{v_{i,2}-v_{i,3}}^\nu f(v_{i,3})$$

- (c) Ist  $\theta_i = 2$ , dann gelte für  $1 \leq \mu \leq \nu \leq r$

$$D_{z_{i,3}}^\nu s(w_{i,3}^\mu) = D_{z_{i,3}}^\nu f(w_{i,3}^\mu)$$

- (d) Ist  $\theta_i \in \{2, 3\}$ , dann gelte für  $j = 1, 2, 3$ ,  $r+1 \leq \nu \leq 2r-1$  und  $1 \leq \mu \leq 2r-\nu$

$$D_{z_{i,j}}^\nu s(w_{i,j}^\mu) = D_{z_{i,j}}^\nu f(w_{i,j}^\mu)$$

(iii) Ist  $r$  gerade und  $T_i = \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$  ein Dreieck mit  $\theta_i \geq 2$ , dann gelte für  $j = 1, 2, 3$  und  $\rho + 1 \leq \nu \leq \rho + r$

$$\begin{aligned} D_{v_{i,4}-v_{i,j}}^\nu s(v_{i,j}) &= D_{v_{i,4}-v_{i,j}}^\nu f(v_{i,j}) \\ s(v_{i,4}) &= f(v_{i,4}) \end{aligned}$$

wobei  $v_{i,4}$  das Baryzentrum von  $T_i$  bezeichne.

**Beweis:** Mit Satz 2.3 und 2.4 folgt unmittelbar, dass sich alle Koeffizienten  $c_\alpha^i$  der bestimmenden Menge aus Satz 3.5 aus den Interpolationsbedingungen berechnen lassen. Sei  $M$  die Anzahl der Bedingungen, dann gilt somit  $\dim S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta}) \leq M$ . Mit (2.2) folgt wegen  $E = 3\Theta_0 + 2\Theta_1 + \Theta_2$ :

$$\begin{aligned} \Theta_2 + 2\Theta_3 &= \Theta_2 + 2\Theta_3 + (3\Theta_0 + 2\Theta_1 + \Theta_2) - (E_B + E_I) \\ &= \Theta_0 + 2N - (2V_B + 3V_I - 3) \\ &= \Theta_0 + V_I - 1 \end{aligned}$$

Für  $r$  ungerade erhält man hieraus:

$$\begin{aligned} M &= \binom{\rho+2}{2} V + \binom{\rho+1}{2} \Theta_0 + \left[ \binom{\rho+1}{2} - \binom{r+1}{2} \right] \Theta_1 \\ &\quad + \binom{r+1}{2} \Theta_2 + 3 \binom{r}{2} (\Theta_2 + \Theta_3) \\ &= \frac{7r^2 + 4r + 1}{4} V_B + \frac{15r^2 + 1}{8} (V_I + \Theta_2 + \Theta_3) + \frac{-3r^2 + 6r + 1}{4} \\ &= \binom{d+2}{2} - \left[ \binom{d+2}{2} - \binom{\rho+2}{2} \right] (V_I + \Theta_2 + \Theta_3) \\ &\quad + \left[ \binom{d-r+1}{2} - 2 \binom{\rho-r+1}{2} \right] (E_I + 3\Theta_2 + 3\Theta_3) \end{aligned}$$

Analog ergibt sich für  $r$  gerade:

$$\begin{aligned} M &= \binom{\rho+2}{2} V + \binom{\rho+1}{2} \Theta_0 + \left[ \binom{\rho+1}{2} - \binom{r+1}{2} \right] \Theta_1 \\ &\quad + \binom{r+1}{2} \Theta_2 + 3 \binom{r}{2} (\Theta_2 + \Theta_3) + (3r + 1) (\Theta_2 + \Theta_3) \\ &= \frac{7r^2 + 10r + 4}{4} V_B + \frac{15r^2 + 18r + 8}{8} (V_I + \Theta_2 + \Theta_3) - \frac{3}{4} r^2 \\ &= \binom{d+2}{2} - \left[ \binom{d+2}{2} - \binom{\rho+2}{2} \right] (V_I + \Theta_2 + \Theta_3) \\ &\quad + \left[ \binom{d-r+1}{2} - 2 \binom{\rho-r+1}{2} \right] (E_I + 3\Theta_2 + 3\Theta_3) \end{aligned}$$

Nach Satz 2.10 folgt somit  $\dim S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta}) \geq M$ . □

Für die Ableitungen im Eckpunkt  $v_{i,3}$  nach (ii) kann man auch Ableitungen über die Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  verwenden. Der Interpolant lässt sich dann mit den Bedingungen

$$D_{z_{i,1}}^\nu s(w_{i,1}^\mu) = D_{z_{i,1}}^\nu f(w_{i,1}^\mu)$$

für  $r+1 \leq \nu \leq \rho$  und  $1 \leq \mu \leq \nu$  eindeutig bestimmen. Diese Lösung hat jedoch den Nachteil, dass die Koeffizienten  $c_\alpha$  mit  $\alpha_3 \leq 3$  in die Berechnung der Koeffizienten  $c_\alpha$  mit  $r+1 \leq \alpha_3 \leq \rho$  eingehen, so dass der Interpolant nicht lokal bestimmt werden kann. Mit dem Interpolationsschema aus Satz 3.6 lassen sich dagegen für gerade  $r$  alle Koeffizienten und für ungerade  $r$  alle bis auf den Koeffizienten  $c_{r,r,r}^i$  lokal berechnen. Hierdurch sichern wir die hohe Approximationsgüte unseres Interpolationsverfahrens.

Zum Beweis der Approximationsordnung verwenden wir den folgenden Satz von Bramble und Hilbert [27, 28].

**Satz 3.7.** *Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  eine offene Menge, die die strikte Kegeleigenschaft erfüllt,  $h := \text{diam}(\Omega)$  und  $L : C^{m+1}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$  ein lineares Funktional mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i)  $L(p) = 0$  für alle  $p \in \tilde{\Pi}_m$  und
- (ii)  $|L(f)| \leq C \sum_{j=0}^m h^j \|f\|_j$  mit  $\|f\|_j := \sup \{\|D_x^\nu D_y^\mu f\| : \nu + \mu = j\}$  und einer Konstante  $C$  unabhängig von  $h$  und  $f$ .

Dann gibt es eine Konstante  $K$  unabhängig von  $h$  und  $f$ , so dass

$$|L(f)| \leq Kh^{m+1} \|f\|_{m+1}$$

gilt.

Für  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir nun  $L(f) = f(x) - s(x)$ , wobei  $s$  den Interpolanten aus Satz 3.6 bezeichnet. Somit gilt  $L(p) = 0$  für alle Polynome  $p \in \tilde{\Pi}_d$ . Wie Lai und Schumaker [98, 99, 100] bemerkt haben, kann man die Bedingung (ii) durch eine Abschätzung der Bernstein-Bézier-Koeffizienten sichern. Wir zeigen deshalb, dass die Koeffizienten  $c_\alpha^i$  des Interpolanten der Bedingung

$$|c_\alpha^i| \leq C \sum_{j=0}^m h^j \|f\|_j \tag{3.3}$$

genügen. Hierbei bezeichnet  $h$  die maximale Kantenlänge der Dreiecke von  $\Delta$ . Sei nun  $2r \leq m \leq d$ , dann folgt (3.3) für ein Dreieck  $T_i$  mit  $\theta_i = 0$  unmittelbar, da alle Koeffizienten nach Satz 2.3 und 2.4 direkt aus Ableitungen bis zur Ordnung  $2r$  berechnet werden. Für ein Dreieck  $T_i$  mit  $\theta_i = 2, 3$  verwenden wir die Unterteilung nach Clough-Tocher. Somit gilt  $\lambda = 3$  in Lemma 3.2 und 3.3, so dass (3.3) folgt, falls die Ungleichung für die Koeffizienten  $c_\alpha^i$  der Bernstein-Bézier-Punkte aus der bestimmenden Menge  $\mathcal{D}$

gilt. Diese berechnen sich entweder direkt aus Interpolationsbedingungen in den Eckpunkten und an den Kanten oder sie ergeben sich aus den  $C^r$ -Bedingungen über die gemeinsame Kante mit einem benachbarten Dreieck.

Somit müssen wir nur den Fall  $\theta_i = 1$  genauer betrachten. In diesem Fall berechnen sich die Koeffizienten  $c_\alpha^i$  mit  $\alpha_1, \alpha_2 \geq d - \rho$  oder  $\alpha_3 > r$  aus den Interpolationsbedingungen. Die übrigen Koeffizienten erhalten wir nach Satz 2.2 aus der  $C^r$ -Bedingung

$$c_\alpha^i = \sum_{|\beta|=\alpha_3} c_{(\alpha_1, \alpha_2, 0)+\beta}^{i_1} B_\beta^{\alpha_3}(\lambda) \quad (3.4)$$

über die gemeinsame Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  mit einem benachbarten Dreieck  $T_{i_1}$ . Die Koeffizienten  $c_\alpha^i$  können jedoch aufgrund der  $C^r$ -Bedingung an den beiden anderen Kanten  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$  und  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$  auch auf die benachbarten Dreiecke  $T_{i_2}$  und  $T_{i_3}$  wirken. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\alpha_2, \alpha_3 \leq r$  (für die Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$ ) bzw.  $\alpha_1, \alpha_3 \leq r$  (für die Kante  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$ ) gilt.

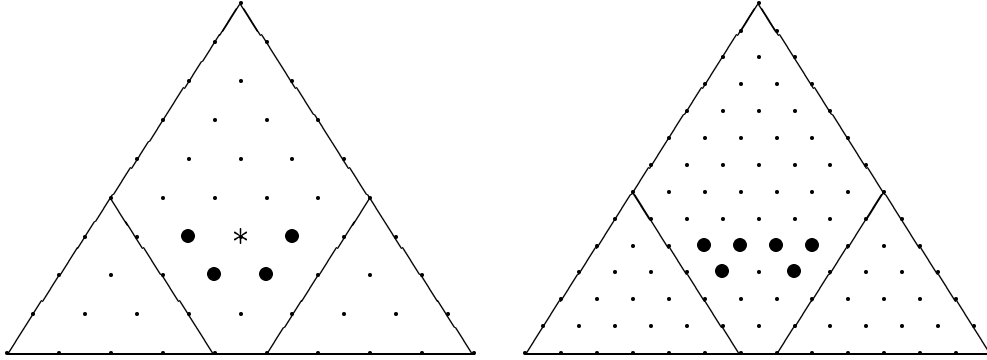


Abbildung 3.5: Bernstein-Bézier-Punkte mit  $\alpha_1, \alpha_3 \leq r$  bzw.  $\alpha_2, \alpha_3 \leq r$

Die Abbildung 3.5 zeigt die zugehörigen Bernstein-Bézier-Punkte ( $\bullet$ ) für den Fall  $r = 3, 4$ . Ist  $r$  gerade, so können wegen  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = d = 3r + 1$  nicht beide Bedingungen gleichzeitig gelten. Die beiden Menge sind deshalb getrennt, so dass die Berechnung lokal mit Koeffizienten aus den Scheiben  $D_{2r}(v_{i,1})$  bzw.  $D_{2r}(v_{i,2})$  erfolgt. Im Fall  $r$  ungerade gilt dies für alle Koeffizienten  $c_\alpha^i$  mit  $\alpha \neq (r, r, r)$ . Der Bernstein-Bézier-Punkt  $P_{r,r,r}^i$  (\*) wirkt über die  $C^r$ -Bedingung auf alle benachbarten Dreiecke. Die Gleichung (3.4) zeigt allerdings, dass er nur in die Berechnung der Koeffizienten  $c_{r,r,r}^{i_j}$  eingeht. Alle anderen Koeffizienten der benachbarten Dreiecke ergeben sich wieder lokal aus Interpolationsbedingungen oder Koeffizienten in den Scheiben  $D_{2r}(v)$ .

Sei nun  $\{T_1, \dots, T_k\}$  eine Menge von Dreiecken mit  $\theta_i = 1$ , so dass  $T_i$  und  $T_{i+1}$  eine gemeinsame Kante haben. Die Eckpunkte seien so nummeriert, dass die Kanten  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$  und  $\overline{v_{i+1,1}v_{i+1,2}}$  gleich sind. Mit  $\lambda_i$  werden die baryzentrischen Koordinaten von  $v_{i,3}$  bezüglich  $T_{i-1}$  bezeichnet. Die Koeffizienten  $c_\alpha^1$  sollen die Bedingung (3.3) erfüllen. Aus

(3.4) erhält man für einen Bernstein-Bézier-Koeffizienten  $c_\alpha^i$  mit  $\alpha_1, \alpha_2 < d - \rho$  und  $\alpha_3 \leq r$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} |c_\alpha^i| &\leq \max \{ |c_\alpha^{i-1}| : |\alpha| = d \} \lambda^{\alpha_3} \sum_{|\beta|=\alpha_3} \frac{a_3!}{\beta_1! \beta_2! \beta_3!} \\ &= (3\lambda)^{\alpha_3} \max \{ |c_\alpha^{i-1}| : |\alpha| = d \} \end{aligned}$$

mit

$$\lambda := \max \{ |\lambda_{i,j}| : i = 1, \dots, k; j = 1, 2, 3 \}$$

Wir können  $\lambda \geq 1$  annehmen und erhalten für  $\alpha_2, \alpha_3 \leq r$  bzw.  $\alpha_1, \alpha_3 \leq r$  die Ungleichung:

$$|c_\alpha^i| \leq (3\lambda)^{kr} \max \{ |c_\alpha^1| : |\alpha| = d \} \leq (3\lambda)^{kr} C \sum_{j=0}^m h^j \|f\|_j$$

Ist  $r$  gerade oder  $\alpha \neq (r, r, r)$ , dann ist  $k$  durch die maximale Anzahl der Dreiecke einer Zelle beschränkt. Diese Anzahl ist ebenso wie  $\lambda$  durch den kleinsten Winkel der Triangulierung beschränkt. Somit ergibt sich

$$|c_\alpha^i| \leq \tilde{C} \sum_{j=0}^m h^j \|f\|_j$$

mit einer Konstante  $\tilde{C}$ , die nur von  $r$  und dem kleinsten Winkel der Triangulierung abhängt. Mit dem Satz von Bramble und Hilbert erhält man den folgenden Satz.

**Satz 3.8.** *Ist  $r$  gerade,  $f \in C^{m+1}(\Omega)$ ,  $2r \leq m \leq d$  und  $s$  der eindeutig bestimmte Interpolant aus Satz 3.6, dann gibt es eine Konstante  $K$ , die nur von  $r$  und dem kleinsten Winkel der Triangulierung abhängt, so dass*

$$\|f - s\| \leq K h^{m+1} \|f\|_{m+1}$$

*gilt. Insbesondere besitzt der Splineraum  $S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta})$  die optimale Approximationsordnung  $d + 1$ .*

Im Fall  $r$  ungerade spielt der Koeffizient  $c_{r,r,r}$  eine besondere Rolle, da er über die  $C^r$ -Bedingung auf alle drei benachbarten Dreiecke wirkt. Die Berechnung ist also nicht mehr lokal auf eine Zelle beschränkt. Wegen der Beziehung

$$|\lambda_{j,2} \dots \lambda_{k-1,2}| = \frac{\text{area}(T_k)}{\text{area}(T_j)}$$

erhalten wir mit den gleichen Bezeichnungen wie oben:

$$\begin{aligned}
|c_{r,r,r}^k| &\leq (3\lambda)^r (1 + |\lambda_{k-1,2}|^r + \dots + |\lambda_{1,2} \dots \lambda_{k-1,2}|^r) C \sum_{j=0}^m h^j \|f\|_j \\
&\leq (3\lambda)^r C \sum_{j=1}^k \left( \frac{\text{area}(T_k)}{\text{area}(T_j)} \right)^r \sum_{j=0}^m h^j \|f\|_j \\
&\leq kC (3\lambda)^r \max \left\{ \left( \frac{\text{area}(T_k)}{\text{area}(T_j)} \right)^r : j = 1, \dots, k \right\} \sum_{j=0}^m h^j \|f\|_j
\end{aligned}$$

Setzt man

$$\tilde{C} := C (3\lambda)^r \max \left\{ \left( \frac{\text{area}(T_k)}{\text{area}(T_j)} \right)^r : j = 1, \dots, k \right\}$$

dann ist  $\tilde{C}$  nur von  $r$  und dem kleinsten Winkel der Triangulierung abhängig und es gilt:

$$|c_{r,r,r}^i| \leq \tilde{C} k \sum_{j=0}^m h^j \|f\|_j$$

Mit dem Satz von Bramble und Hilbert erhalten wir deshalb für ungerade  $r$  die folgende Aussage.

**Satz 3.9.** *Ist  $r$  ungerade,  $f \in C^{m+1}(\Omega)$ ,  $2r \leq m \leq d$  und  $s$  der eindeutig bestimmte Interpolant aus Satz 3.6. Weiter sei  $T_{i_1}, \dots, T_{i_k}$  die längste zusammenhängende Kette von Dreiecken mit  $i_j < i_{j+1}$  und  $\theta_{i_j} = 1$ . Dann gibt es eine Konstante  $K$ , die nur von  $r$  und dem kleinsten Winkel der Triangulierung abhängt, so dass*

$$\|f - s\| \leq K k h^{m+1} \|f\|_{m+1}$$

*gilt. Für  $k \in O(h^{-q})$  besitzt der Splineraum  $S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta})$  mindestens die Approximationsordnung  $d + 1 - q$ .*

Im Allgemeinen kann man nicht erwarten, dass  $k$  konstant ist. Für die Algorithmen aus Abschnitt 3.2 zeigen jedoch unsere numerischen Beispiele in Kapitel 7, dass im Allgemeinen  $k \in O(h^{-1})$  gilt. Für diese Unterteilung besitzt der Interpolant deshalb die Approximationsordnung  $d$ . Unsere Algorithmen haben jedoch das Ziel, die Anzahl der Clough-Tocher Elemente zu minimieren. Es ist hier leicht möglich die Algorithmen so zu modifizieren, dass die Länge  $k$  durch eine Konstante beschränkt wird. In diesem Fall besitzt der Interpolant aus Satz 3.6 auch für ungerade  $r$  optimale Approximationsordnung. Selbst in diesem Fall benötigen wir für jeden inneren Eckpunkt maximal ein Clough-Tocher Element.

Der Interpolant aus Satz 3.6 benötigt sowohl Ableitungen in den Eckpunkten als auch an den Kanten der Triangulierung. Dies sichert die hohe Approximationsgüte des Interpolanten, da er exakt für den Polynomraum  $\tilde{\Pi}_d$  ist. Oft sind jedoch nur Ableitungen in den Eckpunkten gegeben. Hier kann man einen reduzierten Interpolanten wie Laghchim-Lahlou und Sablonnière [90, 91] verwenden. Für diesen Interpolanten fordert man einen niedrigeren Grad für die Ableitungen über die Kanten der Dreiecke.

**Satz 3.10.** *Sei  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\rho = \lfloor \frac{3r}{2} \rfloor$ ,  $d = 2\rho + 1$  und  $f \in C^\rho(\Omega)$ , dann gibt es einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta})$ , der die folgenden Interpolationsbedingungen erfüllt:*

(i) *Für jeden Eckpunkt  $v_i \in \Delta$  und  $\mu + \nu \leq \rho$  gelte:*

$$D_x^\mu D_y^\nu s(v_i) = D_x^\mu D_y^\nu f(v_i)$$

(ii) *Für jedes Dreieck  $T_i = \triangle(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$  sei  $e_{i,j} := \overline{v_{i,j} v_{i,j+1}}$  und  $z_{i,j}$  ein Vektor, der nicht parallel zur Kante  $e_{i,j}$  verläuft.*

(a) *Ist  $\theta_i = 0$ , dann gelte für  $1 \leq \nu \leq r$*

$$D_{z_{i,1}}^\nu s|_{e_{i,1}} \in \Pi_{d-2\nu}$$

(b) *Ist  $\theta_i \in \{0, 1\}$ , dann gelte für  $r+1 \leq \nu \leq \rho$*

$$D_{z_{i,1}}^\nu s|_{e_{i,1}} \in \Pi_{d-2\nu}$$

(c) *Ist  $\theta_i = 2$ , dann gelte für  $1 \leq \nu \leq r$*

$$D_{z_{i,3}}^\nu s|_{e_{i,3}} \in \Pi_{d-2\nu}$$

(d) *Ist  $\theta_i \in \{2, 3\}$ , dann gelte für  $r+1 \leq \nu \leq 2r-1$  und  $j = 1, 2, 3$*

$$D_{z_{i,j}}^\nu s|_{e_{i,j}} \in \Pi_r$$

(iii) *Ist  $r$  gerade und  $T_i = \triangle(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$  ein Dreieck mit  $\theta_i \geq 2$ , dann gelte*

$$s|_{T_i} \in C^{r+1}(T_i)$$

**Beweis:** Mit dem gleichen Beweis wie bei Laghchim-Lahlou und Sablonnière [90, 91] sieht man, dass sich aus den Bedingungen (ii) die Richtungsableitungen  $D_{z_{i,j}}^\nu s|_{e_{i,j}}$  eindeutig bestimmen lassen. Nach Satz 2.4 erhält man hieraus die Bernstein-Bézier-Koeffizienten im Abstand  $\nu$  zur Kante  $e_{i,j}$ . Somit ergeben sich alle Bernstein-Bézier-Koeffizienten, die in Satz 3.6 aus den Ableitungen nach (ii) berechnet wurden. Die Bedingungen in Satz 3.6 (iii) werden durch die höhere Differenzierbarkeitsordnung an den inneren Kanten der Clough-Tocher Elemente ersetzt (siehe Laghchim-Lahlou und Sablonnière [90, 91]).  $\square$



Für die Dreiecke mit  $\theta_i \leq 1$  kann man die Koeffizienten  $c_\alpha^i$  außerhalb der Scheiben  $D_\rho(v)$  auch durch Gradanhebung berechnen (siehe Farin [64]). In beiden Fällen reproduziert der reduzierte Interpolant nur Polynome bis zum Grad  $d - r$ , so dass man auch nur eine Approximationsordnung von  $d - r + 1$  erwarten kann. Alternativ lassen sich die fehlenden Ableitungen an den Kanten durch Nährungsverfahren bestimmen (siehe Gmelig Meyling [73], Gmelig Meyling und Pfluger [75], Grandine [76], Lai und Schumaker [98]). Solche Nährungsverfahren sind allerdings nicht immer numerisch stabil und erhöhen zudem den Berechnungsaufwand für den Interpolanten.

## 3.2 Minimale Unterteilungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wieviele Clough-Tocher Elemente wir für die Interpolation benötigen. Ziel ist es, durch eine geeignete Nummerierung der Dreiecke von  $\Delta$  die Anzahl der benötigten Clough-Tocher Elemente zu minimieren. Der Beweis von Satz 3.6 lieferte die Beziehung

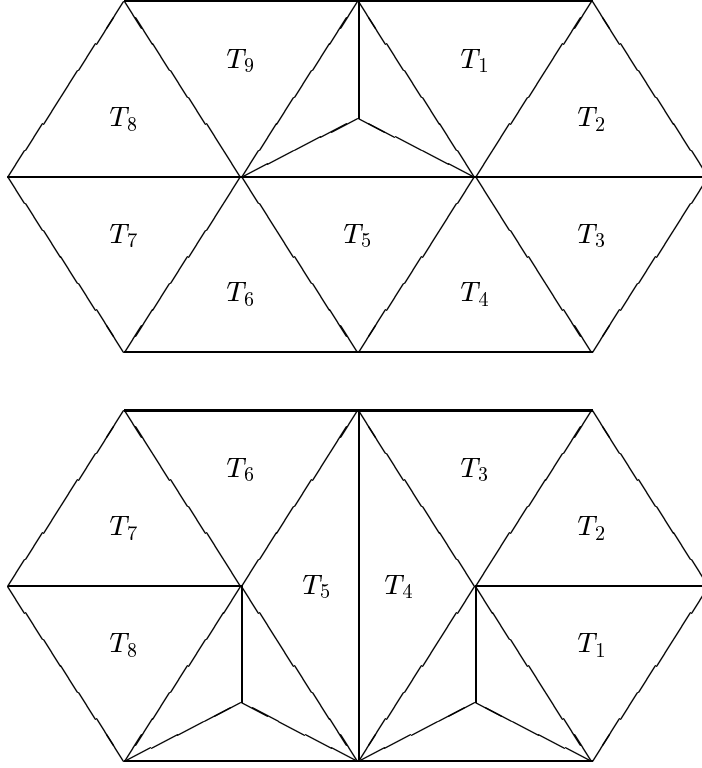
$$\Theta_2 + 2\Theta_3 = \Theta_0 + V_I - 1 \quad (3.5)$$

Die Anzahl der Clough-Tocher Elemente ist durch  $\Theta_2 + \Theta_3$  gegeben und wird somit minimal, wenn  $\Theta_0 = 1$  und  $\Theta_2 = 0$  gilt. Ist  $\Omega$  zusammenhängend, dann kann man immer eine Nummerierung der Dreiecke mit  $\Theta_0 = 1$  finden. Für diesen Fall erhalten wir  $V_I = \Theta_2 + 2\Theta_3$ , so dass die Anzahl der Clough-Tocher Elemente zwischen  $V_I/2$  und  $V_I$  liegt. Nach (2.2) kann sich die Anzahl der Dreiecke durch die Unterteilung somit maximal verdoppeln. Im günstigsten Fall wächst sie sogar um weniger als die Hälfte.

Im allgemeinen kann man aber nicht erwarten, dass jede Triangulierung eine Nummerierung der Dreiecke besitzt, die nur  $V_I/2$  Clough-Tocher Elemente benötigt. Die Abbildung 3.6 zeigt zwei Triangulierungen mit zwei inneren Eckpunkten. Für die erste Triangulierung können wir eine Nummerierung finden, bei der wir nur ein Clough-Tocher Element benötigen. Für die zweite Triangulierung benötigen wir jedoch mindestens zwei Clough-Tocher Elemente und somit die maximale Anzahl  $V_I$ .

### 3.2.1 Charakterisierung einer minimalen Unterteilung

Wir werden nun eine Charakterisierung für eine optimale Unterteilung der Dreiecke herleiten. Hierzu benutzen wir graphentheoretische Methoden und beschreiben einen Zusammenhang zwischen einem maximalen Matching der inneren Kanten von  $\Delta$  und der Lage der Clough-Tocher Elemente. Bei dem Problem des maximalen Matchings ist eine maximale Menge von disjunkten Kanten eines Graphs  $G$  gesucht. Eine ausführliche Darstellung des Matching-Problems findet sich beispielsweise bei Jungnickel [87] und Volkmann [139]. Im Zusammenhang mit unserem Unterteilungsproblem betrachten wir nun den Graphen, der aus allen inneren Eckpunkten der Triangulierung und allen Kanten zwischen zwei inneren Eckpunkten besteht. Ziel ist es, ein maximales Matching

Abbildung 3.6: Minimale Unterteilung von  $\Delta$ 

für diesen Graph zu bestimmen, so dass uns die Kanten des Matchings die Lage der Clough-Tocher Elemente für die Unterteilung  $\tilde{\Delta}$  beschreiben. Bevor wir dieses Problem genauer betrachten, folgen zunächst einige vorbereitende Aussagen.

**Definition 3.11.** Sei  $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$  und  $\pi : \{1, \dots, N\} \longrightarrow \{1, \dots, N\}$  ein Permutation, dann setzen wir analog wie in Abschnitt 3.1

$$\theta_i^\pi := |\{k : e_k \text{ ist gemeinsame Kante von } T_j \text{ und } T_i \text{ mit } \pi(j) < \pi(i)\}|$$

$$\Theta_k^\pi := |\{T_i \in \Delta : \theta_i^\pi = k\}|$$

Ein Permutation  $\pi$  heißt *optimal*, wenn  $\Theta_2^\pi + \Theta_3^\pi \leq \Theta_2^\sigma + \Theta_3^\sigma$  für jede Permutation  $\sigma$  gilt und wir definieren mit

$$\Theta(\Delta) := \min \{\Theta_2^\sigma + \Theta_3^\sigma : \sigma \text{ ist Permutation von } \{1, \dots, N\}\}$$

die minimale Anzahl der Clough-Tocher Elemente für  $\Delta$ .

Zur Vereinfachung der Beschreibung werden wir im folgenden Teil des Kapitels ein Dreieck als *Flap* (siehe Schumaker [128]) bezeichnen, wenn es höchstens eine gemeinsame Kante mit der Resttriangulierung hat. Weiter nennen wir eine innere Kante einen

*Chord* (siehe Dillencourt [55]), wenn sie zwei äußere Eckpunkte besitzt. Die Abbildung 3.7 zeigt eine Triangulierung mit zwei Flaps  $F_1$  und  $F_2$  und drei Chords  $e_1$ ,  $e_2$  und  $e_3$ . Wir werden nun zeigen, dass es für jede Triangulierung  $\Delta$  eine optimale Permutation  $\pi$  mit  $\Theta_0^\pi = 1$  gibt. Hierzu benötigen wir das folgende Lemma.

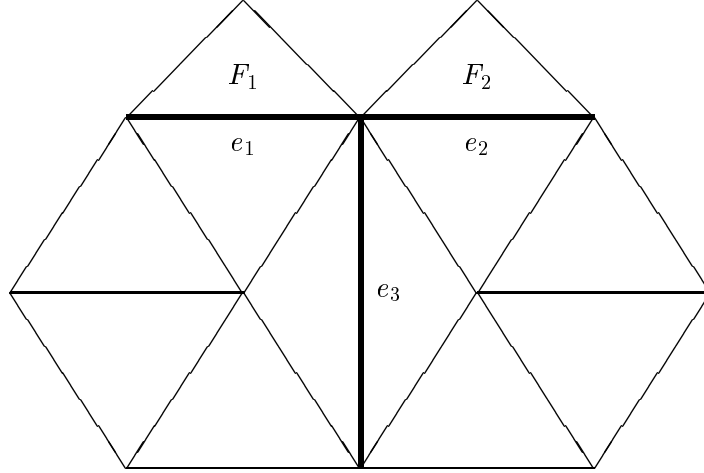


Abbildung 3.7: Triangulierung mit Flaps und Chords

**Lemma 3.12.** *Sei  $\pi$  eine Permutation mit  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_2^\pi = \Theta_3^\pi = 0$ , dann gibt es für jedes Dreieck  $T_i \in \Delta$  eine Permutation  $\pi_i$  mit  $\Theta_k^{\pi_i} = \Theta_k^\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  und  $\theta_i^{\pi_i} = 0$ .*

**Beweis:** Wegen  $\Theta_0^\pi = 1$  muss  $\Delta$  zusammenhängend sein. Für ein beliebiges Dreieck  $T_i \in \Delta$  definieren wir  $\Delta_{i,n}$ ,  $n = 1, \dots, N$  und  $\pi_i$  induktiv. Für  $n = 1$  setzen wir  $\Delta_{i,1} := \{T_i\}$  und  $\pi_i(i) := 1$ . Sei nun  $n > 1$  und  $\Delta_{i,n-1}$  definiert. Da  $\Delta$  zusammenhängend ist, gibt es ein Dreieck  $T_j \in \Delta \setminus \Delta_{i,n-1}$ , das eine gemeinsame Kante mit einem Dreieck aus  $\Delta_{i,n-1}$  hat. Wir setzen  $\Delta_{i,n} := \Delta_{i,n-1} \cup \{T_j\}$  und  $\pi_i(j) := n$ .

Offensichtlich gilt  $\theta_i^{\pi_i} = 0$  und  $\theta_j^{\pi_i} \geq 1$  für  $j \neq i$ . Weiter sind alle Teiltriangulierungen  $\Delta_{i,n}$  zusammenhängend. Angenommen es gibt ein Dreieck  $T_j \in \Delta$  mit  $\theta_j^{\pi_i} \geq 2$ . Wir betrachten nun die kleinste Teiltriangulierung  $\Delta_{i,n}$ , die ein Dreieck  $T_j$  mit  $\theta_j^{\pi_i} \geq 2$  enthält. Dann gibt es zwei benachbarte Dreiecke  $T_{j_1}, T_{j_2} \in \Delta_{i,n-1}$  von  $T_j$ . Da  $\Delta_{i,n-1}$  zusammenhängend ist, gibt es eine zusammenhängende Kette  $T_{j_1} =: T_{\nu_1}, T_{\nu_2}, \dots, T_{\nu_r} := T_{j_2}$  von Dreiecken in  $\Delta_{i,n-1}$ . Also enthält  $T_j =: T_{\nu_0}, T_{\nu_1}, \dots, T_{\nu_r}$  einen geschlossenen Kreis. Sei  $\nu_\mu$  so gewählt, dass

$$\pi(\nu_\mu) = \max \{\pi(\nu_0), \dots, \pi(\nu_r)\}$$

gilt, dann folgt  $\theta_{\nu_\mu}^\pi \geq 2$ . Dies steht im Widerspruch zu den Voraussetzungen.  $\square$

Mit diesem Lemma können wir nun zeigen, dass die Menge  $\{\pi : \Theta_0^\pi = 1\}$  eine optimale Permutation enthält.

**Lemma 3.13.** *Sei  $\sigma$  eine Permutation, dann gibt es eine Permutation  $\pi$  mit  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_2^\pi + \Theta_3^\pi \leq \Theta_2^\sigma + \Theta_3^\sigma$ .*

**Beweis:** Sei  $A := \{T_i : \theta_i^\sigma \leq 1\}$ ,  $B := \Delta \setminus A$  und  $A_1, A_2, \dots, A_m$  die zusammenhängenden Komponenten von  $A$ . Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach der Anzahl der Komponenten von  $A$ .

Sei  $m = 1$ , dann definieren wir für  $T_i \in A_1 = A$ :

$$\pi(i) := |\{j : \sigma(j) \leq \sigma(i); T_j \in A\}|$$

Somit gilt  $\theta_i^\pi \leq \theta_i^\sigma \leq 1$  für alle  $T_i \in A$ . Angenommen es gäbe zwei Dreiecke  $T_{i_1}, T_{i_2} \in A$  mit  $t_{i_1}^\pi = t_{i_2}^\pi = 0$ . Da  $A$  zusammenhängend ist, gibt es eine zusammenhängende Kette  $T_{i_1} =: T_{\nu_1}, T_{\nu_2}, \dots, T_{\nu_r} := T_{i_2}$  von Dreiecken in  $A$ . Sei wieder  $\nu_\mu$  so gewählt, dass

$$\pi(\nu_\mu) = \max \{\pi(\nu_1), \dots, \pi(\nu_r)\}$$

gilt. Wegen  $\theta_{i_1}^\pi = \theta_{i_2}^\pi = 0$  folgt  $\mu \neq 1$  und  $\mu \neq r$  und somit  $2 \leq \theta_i^\pi \leq \theta_i^\sigma$ . Dies steht aber im Widerspruch zur Definition von  $A$ . Somit gibt es nur ein Dreieck  $T_i \in A$  mit  $\theta_i^\pi = 0$ . Da  $\Delta$  zusammenhängend ist, können wir nun  $\pi(i)$  für  $T_i \in B$  so definieren, dass  $\theta_i^\pi \geq 1$  gilt. Damit folgt  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_2^\pi + \Theta_3^\pi \leq |B| = \Theta_2^\sigma + \Theta_3^\sigma$ .

Sei nun  $m > 1$  und die Behauptung gelte für  $m - 1$ . Nach Voraussetzung können wir  $\Delta$  durch Entfernen der Dreiecke aus  $B$  in die Komponenten  $A_1, \dots, A_m$  zerlegen. Wir wählen eine minimale Menge  $B_m \subseteq B$ , so dass  $A_m$  eine Komponente in  $\Delta \setminus B_m$  ist und setzen  $\tilde{A} := \Delta \setminus (A_m \cup B_m)$ . Für  $T_i \in \tilde{A}$  definieren wir

$$\tilde{\sigma}(i) := \left| \left\{ j : \sigma(j) \leq \sigma(i); T_j \in \tilde{A} \right\} \right|$$

Somit gilt  $\theta_i^{\tilde{\sigma}} \leq \theta_i^\sigma$  und

$$\Theta_2^{\tilde{\sigma}} + \Theta_3^{\tilde{\sigma}} \leq |B| - |B_m|$$

Da  $\tilde{A} = \{T_{i_1}, \dots, T_{i_k}\}$  genau  $m - 1$  Komponenten hat, gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Abbildung  $\tilde{\pi} : \{i_1, \dots, i_k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  mit  $\Theta_2^{\tilde{\pi}} = 1$  und

$$\Theta_2^{\tilde{\pi}} + \Theta_3^{\tilde{\pi}} \leq \Theta_2^{\tilde{\sigma}} + \Theta_3^{\tilde{\sigma}} \leq |B| - |B_m|$$

Wir setzen nun  $\pi(i) := \tilde{\pi}(i)$  für alle  $T_i \in \tilde{A}$ . Da  $B_m$  minimal gewählt wurde, gibt es ein Dreieck  $T_\mu \in B_m$ , so dass  $\tilde{A} \cup \{T_\mu\} \cup A_m$  zusammenhängend ist. Sei  $T_\nu$  ein benachbartes Dreieck von  $T_\mu$ , dann wählen wir für  $A_m$  eine Abbildung  $\pi_m$  mit  $\theta_\nu^{\pi_m} = 0$  nach Lemma 3.12 und setzen

$$\begin{aligned} \pi(\mu) &:= |\tilde{A}| + 1 \\ \pi(i) &:= |\tilde{A}| + 1 + \pi_m(i), \quad T_i \in A_m \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.12 folgt  $\theta_i^\pi \geq 1$  für alle  $T_i \in A_m \cup \{T_\mu\}$ . Wir zeigen nun, dass es maximal ein Dreieck  $T_i \in A_m \cup \{T_\mu\}$  mit  $\theta_i^\pi \geq 2$  gibt. Hierzu unterscheiden wir zwei Fälle. Hat  $T_\mu$  nur eine gemeinsame Kante mit  $A_m$ , dann gilt  $\theta_i^\pi = 1$  für alle  $T_i \in A_m$  nach Lemma 3.12. Hat  $T_\mu$  zwei gemeinsame Kanten mit  $A_m$ , dann gibt es ein benachbartes Dreieck  $T_i \in A_m$  mit  $\theta_i^\pi = 2$ . In diesem Fall hat aber  $T_\mu$  nur eine gemeinsame Kante mit  $\bar{A}$ , so dass  $\theta_\mu^\pi = 1$  folgt. Analog wie im Fall  $m = 1$  können wir nun  $\pi(i)$  für die Dreiecke  $T_i \in B_m \setminus \{T_\mu\}$  so definieren, dass  $\theta_i^\pi \geq 1$  gilt und erhalten  $\Theta_0^\pi = 1$  sowie

$$\Theta_2^\pi + \Theta_3^\pi \leq \tilde{\Theta}_2^\pi + \tilde{\Theta}_3^\pi + |B_m| \leq |B| = \Theta_2^\sigma + \Theta_3^\sigma$$

□

Wir werden nun eine Charakterisierung für eine optimale Permutation  $\pi$  mit Hilfe des Matching-Problems der Graphentheorie liefern. Im Folgenden sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit der Knotenmenge  $V$  und der Kantenmenge  $E$ . Für  $\tilde{V} \subseteq V$  bezeichnen wir mit  $G[\tilde{V}]$  den induzierten Teilgraphen mit der Knotenmenge  $\tilde{V}$  und allen Kanten aus  $E$ , die zwei Eckpunkte aus  $\tilde{V}$  besitzen. Weiter schreiben wir  $G - \tilde{V}$  für  $G[V \setminus \tilde{V}]$ .

**Definition 3.14.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph ohne Schlingen und mehrfache Kanten und  $M \subseteq E$ .

- (i)  $M$  heißt ein *Matching* von  $G$ , falls es nur knotendisjunkte Kanten enthält.
- (ii)  $M$  heißt *maximales Matching*, falls es kein Matching  $M' \subseteq E$  mit mehr Elementen gibt.
- (iii)  $M$  heißt *perfektes Matching*, falls alle bis auf maximal ein Knoten in  $M$  enthalten sind.

Weiter setzen wir

$$\alpha(G) := \max \{|M| : M \text{ ist Matching von } G\}$$

Für eine beliebige Triangulierung  $\Delta$  wollen wir im Folgenden mit  $G_\Delta := G[V_I]$  den, durch die Menge aller inneren Eckpunkte induzierten Teilgraphen von  $\Delta$  bezeichnen. Betrachten wir die Triangulierungen aus Abbildung 3.6, dann hat der Graph  $G_\Delta$  im ersten Fall genau eine Kante mit den beiden inneren Eckpunkten. Somit gibt es ein perfektes Matching  $M = E$  von  $G_\Delta$  und es gilt  $|M| = \Theta_3$ . Im zweiten Fall gilt  $E = \emptyset$ , so dass ein maximales Matching keine Elemente enthält. Auch in diesem Fall gilt  $|M| = \Theta_3 = 0$ . Dies deutet darauf hin, dass ein Zusammenhang zwischen der Anzahl eines maximalen Matchings und  $\Theta_3$  besteht.

Wir ordnen nun jeder Permutation  $\pi$  ein Matching  $M$  zu, indem wir Clough-Tochter Elemente mit zwei inneren Eckpunkten  $v_i$  und  $v_j$  aus der Triangulierung entfernen und die Kante  $\bar{v}_i \bar{v}_j$  dem Matching  $M$  hinzufügen. Wegen Lemma 3.13 gibt es immer eine optimale Lösung  $\pi$  mit  $\Theta_0^\pi = 1$ . Wir werden uns deshalb auf diese Fälle beschränken.

**Definition 3.15.** Sei  $M$  ein Matching von  $G_\Delta$  und  $\pi$  eine Permutation mit  $\Theta_0^\pi = 1$ , dann heißt  $M$  von  $\pi$  *erzeugt*, wenn  $\Theta_3^\pi = |M|$  gilt und jede Kante von  $M$  an genau einem Dreieck  $T_i$  mit  $\theta_i^\pi = 3$  liegt.

Es gilt nun das folgende Lemma.

**Lemma 3.16.** *Sei  $\pi$  eine Permutation mit  $\Theta_0^\pi = 1$ , dann gibt es ein von  $\pi$  erzeugtes Matching  $M$ .*

**Beweis:** Wir betrachten die Menge  $\mathcal{T} := \{T_i : \theta_i^\pi = 3\}$  und werden zeigen, dass man die Clough-Tocher Elemente  $T_i \in \mathcal{T}$  so aus der Triangulierung entfernen kann, dass in jedem Schritt mindestens zwei innere Eckpunkte zu äußeren Eckpunkten werden. Diese Paare von inneren Eckpunkten liefern dann das gesuchte Matching  $M$ . Hierzu setzen wir  $\tilde{\mathcal{T}} := \emptyset$  und bestimmen ein Dreieck  $T_m \in \mathcal{T} \setminus \tilde{\mathcal{T}}$ , dass mit einem Dreieck  $T_i \in \tilde{\mathcal{T}}$  verbunden ist. Gibt es kein solches Dreieck, dann wählen wir ein beliebiges Dreieck  $T_m \in \mathcal{T} \setminus \tilde{\mathcal{T}}$ . In beiden Fällen wird  $T_m$  zu  $\tilde{\mathcal{T}}$  hinzugefügt und dieser Schritt solange wiederholt, bis  $\mathcal{T} \setminus \tilde{\mathcal{T}} = \emptyset$  gilt.

Zunächst kann jedes Dreieck  $T_m \in \mathcal{T}$  über maximal einen Eckpunkt mit einem anderen Dreieck  $T_i \in \mathcal{T}$  verbunden sein. Andernfalls hätten die beiden Dreiecke eine gemeinsame Kante, so dass  $\theta_m^\pi < 3$  oder  $\theta_i^\pi < 3$  gelten muss. Wir nehmen an, dass der Algorithmus ein Dreieck  $T_m \in \mathcal{T} \setminus \tilde{\mathcal{T}}$  bestimmt, dass mit zwei Dreiecken  $T_{i_1}, T_{i_2} \in \tilde{\mathcal{T}}$  verbunden ist. Da der Algorithmus zuerst alle zusammenhängenden Dreiecke auswählt, muss es eine Folge von Dreiecken  $T_{i_1} = T_{j_1}, T_{j_2}, \dots, T_{j_k} = T_{i_2} \in \tilde{\mathcal{T}}$  geben, so dass  $T_{j_\nu}$  und  $T_{j_{\nu+1}}$  einen gemeinsamen Eckpunkt haben. Also enthält  $T_m, T_{j_1}, \dots, T_{j_k}$  einen geschlossenen Kreis. Da alle Dreiecke in  $\mathcal{T}$  drei benachbarte Dreiecke besitzen, gibt es Dreiecke  $T_j \notin \mathcal{T}$  innerhalb und außerhalb des Kreises und somit mindestens zwei Dreiecke mit  $\theta_j^\pi = 0$ . Dies steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

Aus diesem Lemma erhalten wir nun den folgenden wichtigen Satz.

**Satz 3.17.** *Für jede Triangulierung gilt  $\Theta(\Delta) \geq V_I - \alpha(G_\Delta)$  und die Gleichheit genau dann, wenn es ein maximales Matching  $M$  gibt, dass von einer Permutation  $\pi$  erzeugt ist.*

**Beweis:** Ist  $M_\pi$  ein maximales Matching, dass von einer Permutation  $\pi$  erzeugt ist, dann gilt mit (3.5):

$$\Theta(\Delta) \leq \Theta_2^\pi + \Theta_3^\pi = V_I - |M_\pi| = V_I - \alpha(G_\Delta)$$

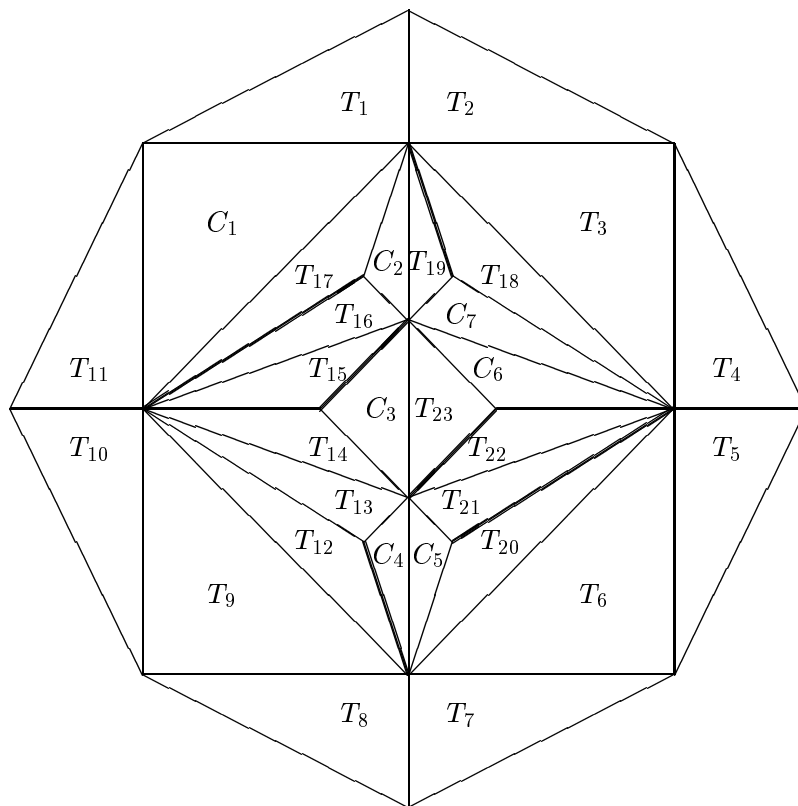
Sei nun  $\sigma$  eine beliebige Permutation, dann gibt es nach Lemma 3.13 eine Permutation  $\pi$  mit  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_2^\sigma + \Theta_3^\sigma \geq \Theta_2^\pi + \Theta_3^\pi$ . Nach Lemma 3.16 gibt es ein von  $\pi$  erzeugtes Matching  $M_\pi$ . Also folgt wieder mit (3.5):

$$\Theta_2^\sigma + \Theta_3^\sigma \geq \Theta_2^\pi + \Theta_3^\pi = V_I - \Theta_3^\pi = V_I - |M_\pi|$$

und somit  $\Theta(\Delta) \geq V_I - \alpha(G_\Delta)$  und  $\Theta(\Delta) > V_I - \alpha(G_\Delta)$ , falls  $|M_\pi| < \alpha(G_\Delta)$  für jedes, von einer Permutation  $\pi$  erzeugtes Matching  $M_\pi$  gilt.  $\square$

**Diskussion:** Satz 3.17 besagt, dass die Anzahl der Clough-Tochter Elemente für unsere Unterteilung  $\tilde{\Delta}$  mindestens so groß wie die Anzahl der inneren Eckpunkte minus der Anzahl eines maximalen Matchings von  $G_{\Delta}$  ist. Die beiden Triangulierungen aus Abbildung 3.6 sind Beispiele dafür, dass in Satz 3.17 die Gleichheit gelten kann. Die erste Triangulierung besitzt ein maximales Matching mit einer inneren Kante. Die dargestellte Unterteilung benötigt deshalb mindestens ein Clough-Tochter Element. Dieses Beispiel zeigt auch, dass das Clough-Tochter Element in einem angrenzenden Dreieck der Matching-Kante liegt. Dies bedeutet, dass das Matching gemäß unserer Definition von der angegebenen Nummerierung  $\pi$  der Dreiecke erzeugt ist. In dem zweiten Beispiel enthält ein maximales Matching keine Kante. Die minimale Anzahl von Clough-Tochter Elementen beträgt deshalb zwei. Es stellt sich nun die Frage, ob es Triangulierungen gibt, für die nicht die Gleichheit in Satz 3.17 gilt. Die Abbildung 3.8 zeigt eine solche Triangulierung. Hier gibt es ein maximales Matching mit sechs Kanten, die in der Abbildung fett eingezeichnet sind. Man überlegt sich aber leicht, dass jede Nummerierung der Dreiecke von  $\Delta$  mindestens sieben Clough-Tochter Elemente in  $\tilde{\Delta}$  erzeugt. Ein solche Nummerierung mit den Clough-Tochter Elementen  $C_1, \dots, C_7$  ist in der Abbildung angegeben. Dies bedeutet, dass man für diese Triangulierung keine Nummerierung der Dreiecke finden kann, so dass alle Clough-Tochter Elemente der Unterteilung  $\tilde{\Delta}$  an den Matching-Kanten liegen. Die Triangulierung aus Abbildung 3.8 ist sicherlich keine 'vernünftige' Triangulierung. Es ist auch sehr schwierig Triangulierungen zu konstruieren, für die in Satz 3.17 nicht die Gleichheit gilt. So genügt es eine Kante in der Triangulierung aus Abbildung 3.8 zu tauschen, beispielsweise die Kante zwischen den Dreiecken  $T_{19}$  und  $C_2$  um eine Triangulierung mit den gleichen Eckpunkten zu erhalten, die eine minimale Unterteilung mit sechs Clough-Tochter Elementen besitzt. In Abschnitt 3.2.2 werden wir zeigen, dass für große Klassen von Triangulierungen in Satz 3.17 immer die Gleichheit gilt.

Wir wollen nun die Idee für die Konstruktion unsere Unterteilung genauer erläutern. Satz 3.17 besagt, dass die Gleichheit gilt, wenn das maximale Matching von  $G_{\Delta}$  von einer Nummerierung  $\pi$  der Dreiecke erzeugt ist. Ein solches Matching muss somit die folgende zusätzliche Eigenschaft erfüllen: Jedes Clough-Tochter Element der Unterteilung  $\tilde{\Delta}$ , dass wir für die gegebene Nummerierung  $\pi$  erhalten, muss an einer Matching-Kante liegen. Wir haben dies oben bei dem Beispiel aus Abbildung 3.6 bereits angedeutet. Die Idee zur Konstruktion der Unterteilung besteht nun darin, die Kanten des Matchings immer am Rand des Graphs  $G_{\Delta}$  zu wählen und die beiden Eckpunkte, sowie alle angrenzenden Kanten aus  $G_{\Delta}$  zu entfernen. Dies bedeutet, dass man die Zellen mit den beiden Eckpunkten der Matching-Kante aus der Triangulierung entfernt. Das erste Beispiel aus Abbildung 3.6 zeigt diesen Schritt. In diesem Beispiel ist eine einfache Triangulierung mit zwei inneren Eckpunkten gegeben. Die beiden Eckpunkte sind über eine Kante verbunden. Zur Konstruktion der Unterteilung  $\tilde{\Delta}$  haben wir ein Clough-Tochter Element in ein, an die Matching-Kante, angrenzendes Dreieck gelegt. Dieses Konstruktionsprinzip können wir nun induktiv auch für eine große Triangulierung anwenden. Wir wählen immer eine Kante am Rand der Graphs  $G_{\Delta}$ , legen ein Clough-Tochter Element in ein



angrenzendes Dreieck und entfernen anschließend die Zellen mit den beiden Eckpunkten der Matching-Kante aus dem Graph  $G_\Delta$ . Dieses Verfahren liefert uns somit gleichzeitig ein Matching von  $G_\Delta$  und die Unterteilung  $\tilde{\Delta}$ .

**Lemma 3.18.** *Sei  $M = \{e_1, \dots, e_k\}$  ein maximales Matching von  $G_\Delta$ . Gibt es eine Folge von Teilgraphen  $\emptyset = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_k \subseteq G_\Delta$ , so dass  $e_i$  eine äußere Kante von  $G_i$  ist, dann gilt  $\Theta(\Delta) = V_I - \alpha(G_\Delta)$ .*

**Beweis:** Wir zeigen durch Induktion nach  $V_I$ , dass es eine Permutation  $\pi$  mit  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_3^\pi = |M|$  gibt. Für  $V_I \leq 1$  bestimmen wir  $\pi$  induktiv und definieren  $\Delta_N := \Delta$ . Sei nun  $\Delta_n$ ,  $n > 1$  definiert, dann wählen wir ein Dreieck  $T_i$  am Rand von  $\Delta_n$  und setzen  $\pi(i) := n$  und  $\Delta_{n-1} = \Delta_n \setminus \{T_i\}$ . Da  $\Delta$  zusammenhängend ist, gilt offensichtlich  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_3^\pi = 0 = |M|$ .

Sei nun  $V_I \geq 2$  und die Behauptung gelte für alle Triangulierungen mit weniger als  $V_I$  Eckpunkten. Gibt es einen Eckpunkt  $v_i$  von  $G_\Delta$  mit  $\deg(v_i) = 0$ , dann kann  $v_i$  in keinem Matching von  $G_\Delta$  enthalten sein. Also ist  $M$  ein maximales Matching von



$G_\Delta - \{v_i\}$ . Da die Zelle um  $v_i$  nur äußere Eckpunkte von  $\Delta$  enthält, gibt es ein Dreieck  $T_\mu := \Delta(v_i, v_j, v_k)$  mit einer äußeren Kante  $\overline{v_j v_k}$  von  $\Delta$ . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für  $\Delta \setminus \{T_\mu\}$  eine Abbildung  $\tilde{\pi}$  mit  $\Theta_0^{\tilde{\pi}} = 1$  und  $\Theta_3^{\tilde{\pi}} = |M|$ . Setzt man  $\pi(\nu) := \tilde{\pi}(\nu)$  für  $\nu \neq \mu$  und  $\pi(\mu) := N$ , dann folgt die Behauptung.

Enthält  $G_\Delta$  keinen Eckpunkt  $v_i$  mit  $\deg(v_i) = 0$ , aber eine äußere Kante  $\overline{v_i v_j} \in M$ , dann wählen wir ein Dreieck  $T_\mu := \Delta(v_i, v_j, v_k)$  mit einem äußeren Eckpunkt  $v_k$  von  $\Delta$ . Da  $M$  ein maximales Matching von  $G_\Delta$  ist, ist  $M \setminus \{\overline{v_i v_j}\}$  ein maximales Matching von  $G_\Delta - \{v_i, v_j\}$ . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für  $\Delta \setminus \{T_\mu\}$  eine Abbildung  $\tilde{\pi}$  mit  $\Theta_0^{\tilde{\pi}} = 1$  und  $\Theta_3^{\tilde{\pi}} = |M| - 1$ . Setzt man wieder  $\pi(\nu) := \tilde{\pi}(\nu)$  für  $\nu \neq \mu$  und  $\pi(\mu) := N$ , dann folgt  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_3^\pi = |M|$ .

Gibt es schließlich in  $G_\Delta$  keinen Eckpunkt  $v_i$  mit  $\deg(v_i) = 0$  und keine äußere Kante  $\overline{v_i v_j} \in M$ , dann muss es nach Voraussetzung einen äußeren Eckpunkt  $v_i$  von  $G_\Delta$  gegeben, der kein Eckpunkt einer Kante aus  $M$  ist. Da  $M$  aber maximal ist müssen umgekehrt alle benachbarten Eckpunkte  $v_j$  von  $v_i$  Eckpunkte einer Kante aus  $M$  sein. Andernfalls könnte man  $M$  durch Hinzunahme der Kante  $\overline{v_i v_j}$  vergrößern. Wir ersetzen deshalb eine Kante mit Eckpunkt  $v_j$  durch die Kante  $\overline{v_i v_j}$  und erhalten so ein maximales Matching  $\tilde{M}$  für  $G_\Delta$ . Mit dem gleichen Beweis wie oben folgt nun wieder die Behauptung.

Für  $\pi$  gilt somit  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_3^\pi = |M|$  und nach Lemma 3.16 gibt es ein von  $\pi$  erzeugtes Matching  $M'$ . Wegen  $|M'| = \Theta_3^\pi = |M|$  ist  $M'$  maximal, so dass  $\Theta(\Delta) = V_I - \alpha(G_\Delta)$  aus Satz 3.17 folgt.  $\square$

### 3.2.2 Klassen von Triangulierungen

In diesem Abschnitt werden wir allgemeine Klassen von Triangulierungen betrachten. Für Triangulierungen ohne separierende Dreiecke können wir zeigen, dass in Satz 3.17 immer die Gleichheit gilt. Hierbei heißt ein Dreieck  $T$  *separierend*, wenn  $\Delta$  Eckpunkte innerhalb und außerhalb von  $T$  besitzt. Mit diesen Ergebnissen können wir Aussagen über minimale Lösungen für  $\Delta^1$ - und  $\Delta^2$ -Triangulierungen herleiten.

**Lemma 3.19.** *Sei  $\Delta$  eine Triangulierung ohne separierende Dreiecke und ohne Flaps, dann gibt es ein maximales Matching  $M$  mit mindestens einer äußeren Kante.*

**Beweis:** Seien  $v_i, \dots, v_n$  die äußeren Eckpunkte und  $M$  ein maximales Matching von  $\Delta$ . Besitzt  $\Delta$  keine Chords, dann gibt es nach Dillencourt [55] zu jeder äußeren Kante  $e$  einen Hamiltonkreis, der durch  $e$  geht. Also gibt es auch ein perfektes Matching, das  $e$  enthält.

Sei nun  $\Delta$  eine Triangulierung mit Chords. Wir wählen einen Chord  $\overline{v_i v_j}$ , so dass  $v_{i+1}, \dots, v_{j-1}$  keine Eckpunkte eines Chords sind. Wir zerlegen  $\Delta$  entlang der Kante  $\overline{v_i v_j}$  in die Teiltriangulierungen  $\Delta_1$  mit den äußeren Eckpunkten  $v_i, \dots, v_j$  und  $\Delta_2$  mit den äußeren Eckpunkten  $v_1, \dots, v_i, v_j, \dots, v_n$ . Nach Konstruktion enthält  $\Delta_1$  somit keinen Chord und  $\overline{v_i v_j}$  als äußere Kante. Wir bezeichnen nun mit  $M_2 \subseteq M$  die Kanten

aus dem Matching  $M$ , bei denen beide Eckpunkte in der Teiltriangulierung  $\Delta_2$  enthalten sind und setzen  $M_1 := M \setminus M_2$ . Da  $\Delta_1$  keine separierenden Dreiecke und keine Chords enthält, gibt es nach Dillencourt [55] einen Hamiltonkreis  $e_1, \dots, e_k$ , der durch die drei äußeren Kanten  $e_1 = \overline{v_j v_i}$ ,  $e_2 = \overline{v_i v_{i+1}}$  und  $e_3 = \overline{v_{i+1} v_{i+2}}$  geht. Nun muss  $v_{i+2} \neq v_j$  gelten und somit  $k \geq 4$  für  $k$  gerade bzw.  $k \geq 5$  für  $k$  ungerade. Es lassen sich nun die folgenden Fälle unterscheiden:

(i)  $M_2$  enthält keine Kante mit dem Eckpunkt  $v_i$  oder  $v_j$ . Wir setzen

$$\tilde{M}_1 := \begin{cases} \{e_1, e_3, \dots, e_{k-2}\} & k \text{ ungerade} \\ \{e_1, e_3, \dots, e_{k-1}\} & k \text{ gerade} \end{cases}$$

Dann gilt

$$|\tilde{M}_1| = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \geq |M_1|$$

(ii)  $M_2$  besitzt eine Kante mit dem Eckpunkt  $v_j$ , aber keine Kante mit dem Eckpunkt  $v_i$ . Wir setzen

$$\tilde{M}_1 := \begin{cases} \{e_2, e_4, \dots, e_{k-1}\} & k \text{ ungerade} \\ \{e_2, e_4, \dots, e_{k-2}\} & k \text{ gerade} \end{cases}$$

Dann gilt

$$|\tilde{M}_1| = \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor \geq |M_1|$$

(iii)  $M_2$  besitzt Kanten mit den Eckpunkten  $v_i$  und  $v_j$ . Wir setzen

$$\tilde{M}_1 := \begin{cases} \{e_3, e_5, \dots, e_{k-2}\} & k \text{ ungerade} \\ \{e_3, e_5, \dots, e_{k-1}\} & k \text{ gerade} \end{cases}$$

Dann gilt

$$|\tilde{M}_1| = \left\lfloor \frac{k-2}{2} \right\rfloor \geq |M_1|$$

In allen drei Fällen gilt  $\tilde{M}_1 \cap M_2 = \emptyset$  und wir erhalten mit  $\tilde{M} := \tilde{M}_1 \cup M_2$  eine Menge von knotendisjunkten Kanten, für die gilt

$$|\tilde{M}| = |\tilde{M}_1| + |M_2| \geq |M_1| + |M_2| = |M|$$

Also ist  $\tilde{M}$  ein maximales Matching. Dieses enthält mit  $e_2$  oder  $e_3$  eine äußere Kante von  $\Delta$ .  $\square$

Mit diesem Lemma können wir nun die Aussage aus Satz 3.17 für Triangulierungen ohne separierende Dreiecke verschärfen.

**Satz 3.20.** *Sei  $\Delta$  eine Triangulierung ohne separierende Dreiecke, dann gilt  $\Theta(\Delta) = V_I - \alpha(G_\Delta)$ .*

**Beweis:** Wir zeigen, dass es ein maximales Matching von  $G_\Delta$  mit der Eigenschaft aus Lemma 3.18 gibt. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach  $V_I$ . Für  $V_I \leq 1$  ist  $M = \emptyset$  offensichtlich ein maximales Matching, das die Bedingungen erfüllt.

Sei nun  $V_I \geq 2$  und die Behauptung gelte für alle Graphen  $G_\Delta$  mit weniger als  $V_I$  Knoten. Wir wählen ein maximales Matching  $M$  von  $G_\Delta$ . Gibt es einen Eckpunkt  $v_i$  mit  $\deg(v_i) = 0$ , dann kann  $v_i$  in keinem Matching enthalten sein. Also ist  $M$  ein maximales Matching von  $G_\Delta - \{v_i\}$ . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein maximales Matching  $\tilde{M}$  von  $G_\Delta - \{v_i\}$  mit der Eigenschaft aus Lemma 3.18. Wegen  $|\tilde{M}| = |M|$  ist  $\tilde{M}$  auch ein maximales Matching für  $G_\Delta$ .

Gibt es einen Eckpunkt  $v_i$  mit  $1 \leq \deg(v_i) \leq 2$ , dann sind alle Kanten mit dem Eckpunkt  $v_i$  äußere Kanten von  $G_\Delta$ . Gibt es nun eine Kante  $\overline{v_i v_j} \in M$ , dann können wir nach Induktionsvoraussetzung für  $G_\Delta - \{v_i, v_j\}$  ein maximales Matching  $\tilde{M}$  mit der Eigenschaft aus Lemma 3.18 wählen. Da  $M \setminus \{\overline{v_i v_j}\}$  ein Matching von  $G_\Delta - \{v_i, v_j\}$  ist, muss  $|\tilde{M}| \geq |M| - 1$  gelten. Somit ist  $\tilde{M} \cup \{\overline{v_i v_j}\}$  ein maximales Matching für  $G_\Delta$ , das die Bedingungen erfüllt. Gibt es keine Kante mit Eckpunkt  $v_i$  in  $M$ , dann muss jeder benachbarte Eckpunkt  $v_j$  von  $v_i$  ein Eckpunkt einer Kante aus  $M$  sein. Andernfalls könnte man  $M$  durch Hinzufügen der Kante  $\overline{v_i v_j}$  vergrößern. Wir entfernen nun eine Kante mit Eckpunkt  $v_j$  aus  $M$  und fügen  $\overline{v_i v_j}$  hinzu. Das neue Matching hat die gleiche Ordnung und ist somit wieder maximal. Mit dem gleichen Beweis wie oben folgt die Behauptung.

Gibt es schließlich in  $G_\Delta$  keinen Eckpunkt  $v_i$  mit  $\deg(v_i) \leq 2$ , dann ist  $G_\Delta$  eine Triangulierung ohne separierende Dreiecke und ohne Flaps. Nach Lemma 3.19 gibt es ein maximales Matching  $M$  mit einer äußeren Kante  $\overline{v_i v_j}$ . Die Behauptung beweist man nun wieder wie im Fall  $1 \leq \deg(v_i) \leq 2$ .  $\square$

Triangulierungen ohne separierende Dreiecke sind beispielsweise gleichmäßige oder deformierte  $\Delta^1$  und  $\Delta^2$ -Triangulierungen (zur Definition siehe Davydov, Nürnberger, Walz und Zeilfelder [47]). Mit Satz 3.20 erhalten wir für solche Triangulierungen die folgenden Aussagen.

**Korollar 3.21.** *Gegeben sei eine  $\Delta_{n,m}^1$ -Triangulierung mit  $n$  Spalten und  $m$  Zeilen. Dann gilt:*

$$\Theta(\Delta_{n,m}^1) = \left\lceil \frac{(n-1)(m-1)}{2} \right\rceil$$

**Beweis:** Seien  $Q_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  die Vierecke der Partition mit den Eckpunkten  $v_{i-1,j-1}$ ,  $v_{i,j-1}$ ,  $v_{i,j}$  und  $v_{i-1,j}$ . Dann sind  $v_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $j = 1, \dots, m-1$

die inneren Eckpunkte von  $\Delta$ . Ist  $n$  ungerade, dann erhält man mit

$$M := \left\{ \overline{v_{2i-1,j} v_{2i,j}} : i = 1, \dots, \frac{n-1}{2}, j = 1, \dots, m-1 \right\}$$

ein perfektes Matching für  $G_\Delta$ . Analog folgt dies für  $m$  ungerade. Sind  $n$  und  $m$  gerade, dann ist

$$M := \left\{ \overline{v_{2i-1,j} v_{2i,j}} : i = 1, \dots, \frac{n-2}{2}, j = 1, \dots, m-1 \right\} \\ \cup \left\{ \overline{v_{n-1,2j-1} v_{n-1,2j}} : j = 1, \dots, \frac{m-2}{2} \right\}$$

ein perfektes Matching. Also gilt  $\alpha(G_\Delta) = \left\lfloor \frac{(n-1)(m-1)}{2} \right\rfloor$  und wir erhalten

$$\Theta(\Delta_{n,m}^1) = V_I - \left\lfloor \frac{(n-1)(m-1)}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{(n-1)(m-1)}{2} \right\rceil$$

nach Satz 3.20. □

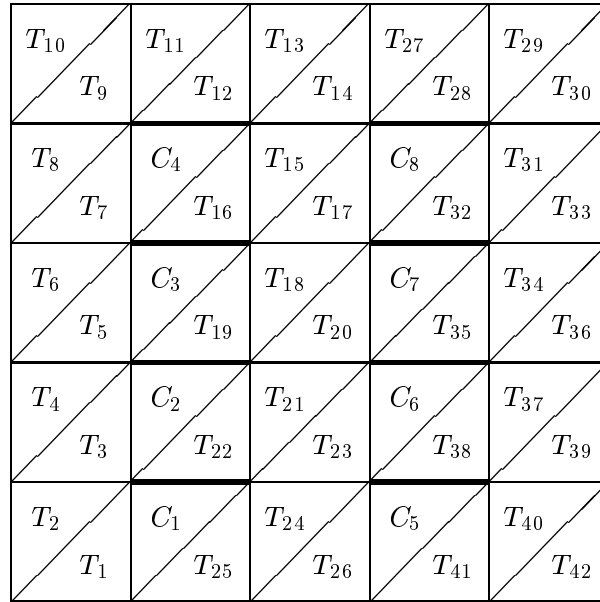


Abbildung 3.9: Perfektes Matching und optimale Nummerierung für  $\Delta_{5,5}^1$

Die Abbildung 3.9 zeigt ein perfektes Matching für  $n = m = 5$  und eine optimale Lösung  $\pi$  mit den Clough-Tochter Elementen  $C_1, \dots, C_8$ . Man sieht hier wieder, dass jedes Clough-Tochter Element genau eine Kante aus dem Matching  $M$  besitzt.

Im Gegensatz zu einer  $\Delta^1$ -Triangulierung gibt es für eine  $\Delta^2$ -Triangulierung kein perfektes Matching. Hier gilt deshalb  $\Theta(\Delta) > V_I/2$ .

**Korollar 3.22.** *Gegeben sei eine  $\Delta_{n,m}^2$ -Triangulierung mit  $n$  Zeilen und  $m$  Spalten. Dann gilt:*

$$\Theta(\Delta_{n,m}^2) = nm$$

**Beweis:** Seien wieder  $Q_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  die Vierecke der Partititon mit den Eckpunkten  $v_{i-1,j-1}$ ,  $v_{i,j-1}$ ,  $v_{i,j}$  und  $v_{i-1,j}$ . Weiter bezeichne  $w_{i,j}$  den singulären Eckpunkt im Viereck  $Q_{i,j}$ . Dann sind  $v_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $j = 1, \dots, m-1$  und  $w_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  die inneren Eckpunkte von  $\Delta_{n,m}^2$  und es gilt  $V_I = (n-1)(m-1) + nm$ . Wir erhalten nun mit

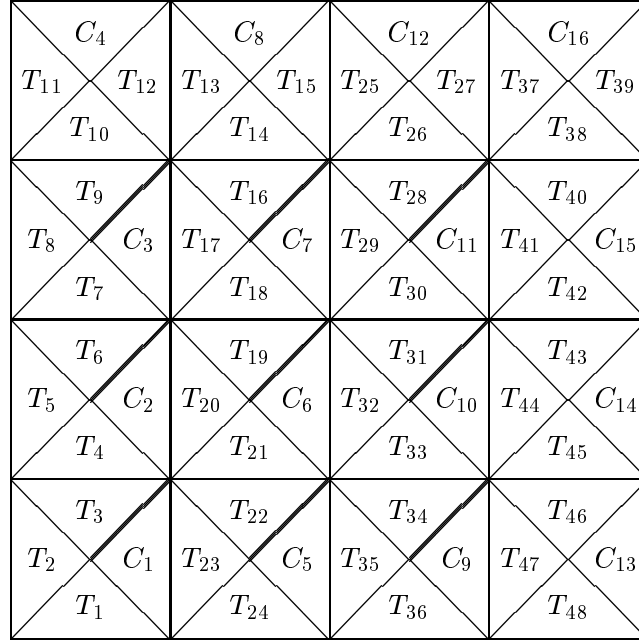
$$M := \{\overline{w_{i,j}v_{i,j}} : i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1\} \quad (3.6)$$

ein Matching mit  $|M| = (n-1)(m-1)$ .

Wir zeigen durch Induktion nach  $n$ , dass jedes Matching von  $G_\Delta$  maximal die Ordnung  $(n-1)(m-1)$  hat. Für  $n = 1$  besitzt  $\Delta_{n,m}^2$  nur die singulären Eckpunkte  $w_{1,j}$  als innere Eckpunkte und somit hat  $G_\Delta$  keine Kanten. Sei nun  $n > 1$  und die Behauptung gelte für  $n-1$ . Wir wählen ein Matching  $M$  und zerlegen dieses in die disjunkten Mengen  $M_1 := \left\{ e \in M : e \text{ ist Kante von } G_{\Delta_{n-1,m}^2} \right\}$  und  $M_2 := M \setminus M_1$ . Ist nun  $e \in M_2$ , dann muss die Kante mindestens einen Eckpunkt  $v_{n-1,j}$  oder  $w_{n,j}$  besitzen. Da die singulären Eckpunkte  $w_{n,j}$  nur zu den Eckpunkten  $v_{n-1,j-1}$  und  $v_{n-1,j}$  benachbart sind, kann  $M_2$  maximal  $m-1$  Kanten enthalten. Für das Matching  $M_1$  von  $G_{\Delta_{n-1,m}^2}$  gilt nach Induktionsvoraussetzung  $|M_1| \leq (n-2)(m-1)$ . Also folgt  $|M| \leq (n-1)(m-1)$  und somit ist das Matching aus (3.6) maximal. Mit Satz 3.20 erhalten wir wiederum  $\Theta(\Delta_{n,m}^2) = V_I - \alpha(G_\Delta) = nm$ .  $\square$

Die Abbildung 3.10 zeigt ein maximales Matching mit 9 Kanten für den Fall  $n = m = 4$ . Für eine optimale Lösung  $\pi$  gilt  $\Theta_3^\pi = 9$ ,  $\Theta_2^\pi = 7$  und man erhält 16 Clough-Tochter Elemente  $C_1, \dots, C_{16}$ . Auch hier sieht man wieder, dass die Clough-Tochter Elemente  $C_i$  mit  $\theta_i = 3$  eine Kante aus  $M$  besitzen. Für  $\Delta^2$ -Triangulierungen ist allerdings zu bemerken, dass der singuläre Eckpunkt in jedem Viereck im Allgemeinen kein echter Eckpunkt der Triangulierung ist, sondern meist durch Einzeichnen der beiden Diagonalen konstruiert ist. Bei Interpolationsverfahren auf  $\Delta^2$ -Triangulierungen werden deshalb an den singulären Eckpunkten meist keine Interpolationsbedingungen vorgegeben. Solche Interpolationsverfahren wurden beispielsweise von Laghchim-Lahlou und Sablonnière [91] und Lai [95, 96] entwickelt.

Eine weitere Klasse von Triangulierungen ohne separierende Dreiecke sind Nested-Polygon Triangulierungen (siehe Nürnberger und Zeilfelder [117]). Für diese Klasse von Triangulierungen haben Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [52] und Nürnberger und Zeilfelder [117] verschiedene Interpolationsverfahren entwickelt. Auch für diese Klasse gilt in Satz 3.20 die Gleichheit.

Abbildung 3.10: Maximales Matching und optimale Nummerierung für  $\Delta_{4,4}^2$ 

In Delaunay-Triangulierungen können dagegen separierende Dreiecke auftreten. Im allgemeinen werden sie aber nur sehr wenige separierende Dreiecke enthalten. Dies ist darin begründet, dass Delaunay-Triangulierungen den minimalen Winkel aller Dreiecke maximieren. Ist  $\overline{v_1 v_2}$  eine innere Kante,  $T_1 = \triangle(v_1, v_2, v_3)$  und  $T_2 = \triangle(v_1, v_2, v_4)$  die anliegenden Dreiecke und  $\alpha_1, \alpha_2$  die Winkel in den Eckpunkten  $v_3$  bzw.  $v_4$ , dann muss in einer Delaunay-Triangulierung

$$\alpha_1 + \alpha_2 \leq 180^\circ$$

gelten (siehe Dillencourt [56]). Da in einem separierenden Dreieck mindestens ein Winkel  $\alpha \geq 120^\circ$  existiert, besitzen Delaunay-Triangulierung deshalb nur wenige separierende Dreiecke. Man kann annehmen, dass in vielen Delaunay-Triangulierungen auch die Gleichheit aus Satz 3.20 gilt. Nach Dillencourt [56] besitzt aber jede Delaunay-Triangulierung ein perfektes Matching, so dass viele Delaunay-Triangulierung sogar eine optimale Lösung mit  $\left\lceil \frac{V_I}{2} \right\rceil$  Clough-Tochter Elementen besitzen.

Das Gegenbeispiel aus Abbildung 3.8 zeigt, dass man auch für Triangulierungen mit 'wenigen' separierenden Dreiecken die Gültigkeit von Satz 3.20 erwarten kann. Für die Triangulierung aus der Abbildung gilt  $\Theta(\Delta) > V_I - \alpha(G_\Delta)$ , so dass sie nach Satz 3.20 separierende Dreiecke besitzen muss. In diesem Beispiel ist sogar jedes Dreieck von  $G_\Delta$

in einem separierenden Dreieck enthalten und es genügt, wie wir bereits oben bemerkt haben, ein Kante zu tauschen, um eine Triangulierung mit den gleichen Eckpunkten zu erhalten, für die  $\Theta(\Delta) = V_I - \alpha(G_\Delta)$  gilt.

### 3.2.3 Unterteilungsalgorithmen

Im diesem Abschnitt stellen wir zwei Algorithmen zur Bestimmung einer Nummerierung mit möglichst wenigen Clough-Tochter Elementen vor. Eine Berechnung der Lösung durch Austesten aller Permutationen mit  $\Theta_0^\pi = 1$  ist nicht effizient, da die Anzahl der Permutationen exponentiell in  $V$  wächst. Stattdessen kann man versuchen ein maximales Matching der Triangulierung zu berechnen und hieraus die Lage der Clough-Tochter Elemente zu bestimmen. Effiziente Algorithmen zur Berechnung eines maximalen Matchings wurden beispielsweise von Edmonds [61], Lovász und Plummer [105] und Nishizeki und Chiba [108] entwickelt. Wir benötigen aber ein maximales Matching, das die zusätzlichen Voraussetzungen aus Lemma 3.18 erfüllt. Eine Möglichkeit besteht darin, immer eine äußere Kante aus einem maximalen Matching auszuwählen und für die verbleibende Resttriangulierung ein neues Matching zu bestimmen. Dies muss allerdings nicht immer zu einer optimalen Lösung führen. Zudem hätte dieser Algorithmus keine lineare Komplexität und ist deshalb für große Triangulierungen ungeeignet.

Wir werden uns deshalb darauf beschränken, Algorithmen mit linearer Komplexität vorzustellen, die zu fast-optimalen Lösungen führen. Eine einfache Lösung besteht darin, induktiv die Triangulierung aufzubauen, indem man ein Dreieck  $T_i$  an die Teiltriangulierung  $\Delta_{i-1} = \{T_1, \dots, T_{i-1}\}$  anhängt. Hierdurch erhält man zumindest eine Permutation  $\pi$  mit  $\Theta_0^\pi = 1$ . Allerdings enthält diese Nummerierung im Allgemeinen viele Clough-Tochter Elemente mit  $\theta_i^\pi = 2$ . Eine Variation besteht deshalb darin, ein Dreieck mit zwei Kanten zur Teiltriangulierung nur dann auszuwählen, wenn es kein anderes Dreieck mehr gibt. Der folgende Algorithmus beschreibt diesen Ansatz.

#### Algorithmus 3.23.

*Eingabe:* Liste  $\Delta$  von Dreiecken

*Ausgabe:* Liste  $\pi$  von Integer

Initialisiere zwei leere Warteschlangen  $Q$  und  $Q_2$

markiere Dreieck  $T_1$  und füge 1 in  $Q$  ein

$n := 1$

**Solange**  $Q$  oder  $Q_2$  nicht leer ist

**Falls**  $Q$  nicht leer ist

        hole nächsten Wert  $m$  von  $Q$

**Falls**  $T_m$  zwei markierte Nachbarn hat

            füge  $m$  in  $Q_2$  ein und gehe zum Anfang der Schleife

**Sonst**

        hole nächsten Wert  $m$  von  $Q_2$

$\pi(m) := n, n := n + 1$

**Für alle** unmarkierten Nachbarn  $T_i$  von  $T_m$   
 markiere Dreieck  $T_i$   
 füge  $i$  in  $Q$  ein

Man sieht unmittelbar, dass der Algorithmus linear in  $N$  ist, da jedes Dreieck genau einmal in  $Q$  und maximal einmal in  $Q_2$  eingefügt wird. Da  $Q$  und  $Q_2$  nur Dreiecke mit einer Kante zur Teiltriangulierung  $\Delta_j := \{T_i : \pi(i) \leq j\}$  enthalten, wird eine Permutation mit  $\Theta_0^\pi = 1$  berechnet. Der Algorithmus ist einfach zu implementieren und liefert für Delaunay-Triangulierungen aus zufällig verteilten Punkten sehr gute Unterteilungen. Die Abbildung 3.11 zeigt eine Unterteilung, die mit dem Algorithmus 3.23 für eine Delaunay-Triangulierung mit 58 inneren Eckpunkten berechnet wurde. Sie enthält nach der Unterteilung 34 Clough-Tocher Elemente.

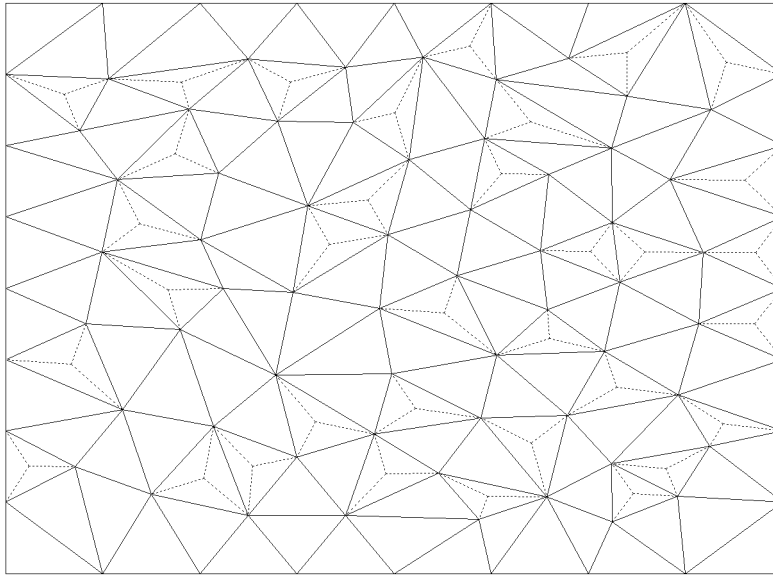


Abbildung 3.11: Unterteilung nach Algorithmus 3.23

Der zweite Algorithmus, den wir hier vorstellen, verfolgt die Idee des Beweises von Satz 3.20. In jedem Schritt werden zunächst alle Eckpunkte  $v$  mit  $\deg(v) = 0$  entfernt. Anschließend betrachten wir die Eckpunkte mit  $1 \leq \deg(v) \leq 2$  und wählen für diese eine äußere Kante von  $G_\Delta$  mit Eckpunkt  $v$ , die wir dem Matching  $M$  hinzufügen. Gibt es nur noch Eckpunkte  $v$  mit  $\deg(v) \geq 3$ , dann wählen wir eine beliebige äußere Kante von  $G_\Delta$ . Der Algorithmus bestimmt somit ein Matching  $M$ , das die Bedingung aus Lemma 3.18 erfüllt. Die Kanten des Matching geben die Lage der Clough-Tocher Elemente für die Unterteilung an.



**Algorithmus 3.24.***Eingabe:* Graph  $G = (V, E)$ *Ausgabe:* Menge  $M$  von Kanten**Solange**  $G$  nicht leer ist**Falls** es einen Eckpunkt  $v \in V$  mit  $\deg(v) = 0$  gibt $G := G - \{v\}$ **Sonst falls** es einen Eckpunkt  $v \in V$  mit  $\deg(v) \leq 2$  gibtwähle eine Kante  $e = \overline{vw}$  von  $G$  $M := M \cup \{e\}$  $G := G - \{v, w\}$ **Sonst**wähle eine äußere Kante  $e = \overline{vw}$  von  $G$  $M := M \cup \{e\}$  $G := G - \{v, w\}$ 

Wählt man geeignete Datenstrukturen für die Eckpunkte und äußeren Kanten von  $G$ , dann können die Bedingung in der Schleife in konstanter Zeit geprüft werden, so dass auch dieser Algorithmus linear ist. Es ist offensichtlich, dass der Algorithmus ein maximales Matching bestimmt, wenn  $G$  während der gesamten Berechnung zusammenhängend ist. Im Allgemeinen kann aber  $G$  durch das Entfernen von Kanten in mehrere Komponenten zerfallen.

## Kapitel 4

# Hermite-Interpolation auf Quadrangulierungen

Neben Triangulierungen wurden in den vergangenen Jahren auch Viereckszerlegungen eines Polygonebietes  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  für die Interpolation mit bivariaten Splines untersucht. Die Bernstein-Bézier-Darstellung von bivariaten Splines benötigt allerdings Dreiecke als Grundgebiet für die Polynomstücke. Splinefunktionen werden deshalb meist auf Triangulierungen definiert. Vierecke eignen sich nicht direkt zur Interpolation mit bivariaten Splines. Nur für Rechteckszerlegungen gibt es Verfahren mit Tensorprodukt-Splines (siehe Farin [65]). Für beliebige Quadrangulierungen wählt man dagegen nicht die Vierecke als Grundgebiet für die Polynomstücke, sondern man trianguliert die Vierecke durch Einzeichnen von Diagonalen in zwei oder vier Dreiecke.

Interpolationsmethoden auf Quadrangulierungen wurden vor allem in den letzten 10 Jahren entwickelt. Diese Verfahren sind oft effizienter als Verfahren auf Triangulierungen, da sie weniger Interpolationsbedingungen benötigen (siehe Lai und Schumaker [98]). Auf der anderen Seite gibt es bisher nur wenige Algorithmen zur Konstruktion von Quadrangulierungen. Bose und Toussaint [26] beschreiben verschiedene Methoden, mit denen man Quadrangulierungen aus einer beliebigen Punktmenge erzeugen kann. Bei diesen Verfahren können jedoch sehr kleine Winkel entstehen, die oft ungünstig für das Approximationsverhalten bei der Splineinterpolation sind. Andere Ansätze erzeugen Quadrangulierungen durch Umwandlung einer Triangulierung (siehe Ramaswami, Ramos und Toussaint [122]). Dies hat zwei Vorteile. Zum einen gibt es effiziente Algorithmen zur Konstruktion von Triangulierungen (siehe Aurenhammer [15], Dwyer [57], Fortune [66], Guibas und Stolfi [78], Lawson [102] und Su [138]). Zudem wurden verschiedene Verfahren entwickelt, die kleine Winkel in Triangulierungen verhindern (siehe Bern und Eppstein [18], Chew [29], Ruppert [124] und Shewchuk [135]). Allerdings kann man nicht immer eine Triangulierung in eine Quadrangulierung umwandeln. Im Allgemeinen werden zusätzliche Hilfspunkte, so genannte Steiner-Punkte benötigt. Bei der Interpolation mit Quadrangulierungen muss man zwischen konvexen und nicht-

konvexen Quadrangulierungen unterscheiden. In konvexen Quadrangulierung kann jedes Viereck durch Einzeichnen von zwei Diagonalen trianguliert werden. Diese Unterteilung wurde erstmals von Fraeijs de Veubeke und Sander [67] beschrieben. Hierdurch entsteht ein singulärer Eckpunkt in der Mitte jedes Vierecks. Interpolationsverfahren für konvexe Quadrangulierungen finden sich beispielsweise bei Laghchim-Lahlou und Sablonnière [91], Lai [96] und Nürnberger und Zeilfelder [114]. Für beliebige Quadrangulierungen muss man eine andere Unterteilung der Vierecke wählen. Lai und Schumaker [98] beschreiben eine Methode bei der jedes Viereck in vier Dreiecke unterteilt wird. Für diese Unterteilung entwickeln sie einen  $C^2$ -Interpolanten vom Grad 6, der optimale Approximationsordnung besitzt.

Dieses Kapitel enthält mehrere Interpolationsverfahren für Splines auf Quadrangulierungen. Wie in Kapitel 3 werden wir die Interpolanten schrittweise berechnen. Hierdurch erhalten wir Unterteilungen, die weniger Dreiecke benötigen als Methoden mit finiten Elementen. Zunächst behandeln wir für beliebige Quadrangulierungen eine Unterteilung mit Clough-Tocher Elementen. Für diese Unterteilung  $\tilde{\Delta}$  entwickeln wir Hermite-Interpolationsverfahren für die Splineräume  $S_d^r(\tilde{\Delta})$  mit beliebiger Differenzierbarkeitsordnung  $r$  und Grad  $d = 3r$  für ungerade  $r$  und  $d = 3r + 1$  für gerade  $r$ . Anschließend untersuchen wir die Fälle  $S_3^1(\Delta)$  und  $S_7^2(\Delta)$  für eine Unterteilungsmethode von Lai und Schumaker [98]. Bei dieser Unterteilungsmethode werden die konvexen Vierecke nach Fraeijs de Veubeke und Sander unterteilt. In die nicht-konvexen Vierecke werden eine Diagonale, sowie zwei Kanten von den anderen Eckpunkten zum Mittelpunkt der Diagonale hinzugefügt. Durch diese Unterteilung entstehen in allen Vierecken vier Dreiecke. Zur Konstruktion unserer Interpolationsverfahren beschreiben wir zunächst eine minimale bestimmende Menge, aus der wir dann Hermite-Interpolationsbedingungen ableiten. Die Konstruktion der minimalen bestimmenden Menge erfolgt wieder schrittweise durch Anhängen von Vierecken  $Q_i$  an die Teilquadrangulierung  $\diamond_{i-1} = \{Q_1, \dots, Q_{i-1}\}$ . Es zeigt sich, dass die Konstruktion einer minimalen bestimmenden Menge für die nicht-konvexen Vierecke schwierig ist und eine geeignete Nummerierung der Vierecke erfordert. Die Existenz einer solchen Nummerierung ist nicht offensichtlich und erfordert einen umfangreichen Beweis.

Für konvexe Quadrangulierungen behandeln wir schließlich ein Verfahren, bei dem wir einige Vierecke nach Fraeijs de Veubeke und Sander unterteilen. Für diese Unterteilung  $\tilde{\Delta}$  entwickeln wir Hermite-Interpolationsverfahren für die Splineräume  $S_d^r(\tilde{\Delta})$  mit beliebiger Differenzierbarkeitsordnung  $r$  und Grad  $d = 3r$  für ungerade  $r$  und  $d = 3r + 1$  für gerade  $r$ . Unsere Interpolationsverfahren sind effizienter als die Verfahren von Laghchim-Lahlou und Sablonnière [91], die jedes Viereck in vier Dreiecke unterteilen.

Zunächst folgen die notwendigen Definition für dieses Kapitel.

**Definition 4.1.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Polygon und  $\diamond = \{Q_1, \dots, Q_N\}$  eine Menge von Vierecken, dann heißt  $\diamond$  *Quadrangulierung* von  $\Omega$ , falls gilt

$$(i) \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^N Q_i$$

- (ii) Zwei verschiedene Vierecke  $Q_i$  und  $Q_j$  haben entweder gemeinsame Kanten, einen gemeinsamen Eckpunkt oder keinen gemeinsamen Punkt.

Ein Viereck  $Q_i$  heißt konvex<sup>1</sup>, falls alle Winkel in  $Q_i$  kleiner als  $180^\circ$  sind. Eine Quadrangulierung  $\diamond$  heißt konvex, falls alle Vierecke  $Q_i$  konvex sind.

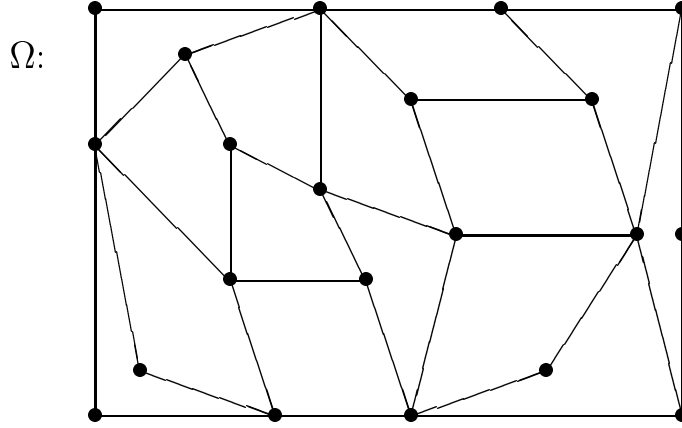


Abbildung 4.1: Quadrangulierung eines Polygons

Analog zu den Bezeichnungen aus Kapitel 3 definieren wir mit

- $E_I^\diamond, E_B^\diamond, E^\diamond$  : die Anzahl der inneren, äußeren, aller Kanten
- $V_I^\diamond, V_B^\diamond, V^\diamond$  : die Anzahl der inneren, äußeren, aller Eckpunkte
- $S^\diamond$  : die Anzahl der singulären Eckpunkte
- $N_K^\diamond, N_N^\diamond, N^\diamond$  : die Anzahl der konvexen, nicht-konvexen, aller Vierecke

von  $\diamond$ . Es gelten die folgenden Beziehungen (siehe Lai und Schumaker [98]):

$$\begin{aligned}
 N^\diamond &= \frac{1}{2} (V_B^\diamond + 2V_I^\diamond - 2) \\
 E_I^\diamond &= \frac{1}{2} (V_B^\diamond + 4V_I^\diamond - 4) \\
 E_B^\diamond &= V_B^\diamond
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Wir werden nun Interpolanten für verschiedene Unterteilungen beschreiben. Die Interpolationsbedingungen auf jedem Viereck werden wieder schrittweise bestimmt und hängen von der Anzahl der gemeinsamen Kanten mit der Teilquadrangulierung ab.

---

<sup>1</sup>Diese Definition entspricht nicht der üblichen Definition eines konvexen Polygons. Sie vereinfacht jedoch die Beschreibung der Unterteilungsmethoden in den folgenden Abschnitten.

Analog zu den Definitionen aus Kapitel 3 bezeichnen wir mit  $\diamond_i := \{Q_1, \dots, Q_i\}$  die Teilquadrangulierung bestehend aus den ersten  $i$  Vierecken von  $\diamond$ . Weiter setzen wir

$$\begin{aligned}\theta_i &:= |\{k : e_k \text{ ist gemeinsame Kante von } Q_i \text{ und } Q_j \text{ mit } j < i\}| \\ \Theta_k &:= |\{Q_i \in \diamond : \theta_i = k\}|\end{aligned}$$

## 4.1 Beliebige Quadrangulierungen

### 4.1.1 Interpolation mit Clough-Tocher Elementen

Dieser Abschnitt beschreibt eine Unterteilungsmethode mit Clough-Tocher Elementen für Quadrangulierungen. Die Methode verwendet die Ideen aus Kapitel 3. Die Unterteilung eines Vierecks  $Q_i$  hängt von der Anzahl der gemeinsamen Kanten mit der Teilquadrangulierung  $\diamond_{i-1}$  ab. Zunächst wird jedes Viereck in zwei Dreiecke unterteilt. Für  $\theta_i \in \{0, 1\}$  ist diese Unterteilung ausreichend. Für  $\theta_i \in \{2, 3\}$  besitzt ein Dreieck zwei gemeinsame Kanten mit der bestehenden Teiltriangulierung. Somit muss dieses Dreieck unterteilt werden. Gilt nun  $\theta_i = 4$ , dann haben sogar beide Dreiecke in  $Q_i$  zwei gemeinsame Kanten zur Teilquadrangulierung und müssen deshalb unterteilt werden. In diesem Fall enthält das Viereck nach der Unterteilung sechs Dreiecke.

Die Anzahl der Clough-Tocher Elemente ist somit durch  $\Theta_2 + \Theta_3 + 2\Theta_4$  gegeben. Wie im Beweis von Satz 3.6 ergibt sich mit (4.1) die Bedingung

$$\Theta_2 + 2\Theta_3 + 3\Theta_4 = \Theta_0 + V_I^\diamond - 1 \quad (4.2)$$

Wir erhalten somit eine optimale Nummerierung der Vierecke, wenn  $\Theta_0 = 1$  und  $\Theta_2 = \Theta_4 = 0$  gilt. Dies entspricht dem Ergebnis aus Kapitel 3 für Triangulierungen. Wie wir in Kapitel 5 zeigen werden, können wir immer eine Nummerierung mit  $\Theta_0 = 1$  und  $\Theta_4 = 0$  bestimmen. Im Folgenden wollen wir dies annehmen. Die Eckpunkte eines Vierecks  $Q_i = \triangle(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4})$  können wir deshalb so nummerieren, dass die Kanten  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}, \dots, \overline{v_{i,\theta_i}v_{i,\theta_i+1}}$  gemeinsame Kanten mit der Teilquadrangulierung  $\diamond_{i-1}$  sind. Für  $\theta_i \neq 2$  ist dies offensichtlich. Gilt  $\theta_i = 2$ , dann folgt dies aus  $\Theta_0 = 1$ . Nehmen wir beispielsweise an, dass  $Q_i$  nur über die Kanten  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  und  $\overline{v_{i,3}v_{i,4}}$  mit  $\diamond_{i-1}$  verbunden ist, dann gibt es in  $\diamond_{i-1}$  genau zwei benachbarte Vierecke  $Q_{i_1}$  und  $Q_{i_2}$  von  $Q_i$ . Wegen  $\Theta_0 = 1$  ist  $\diamond_{i-1}$  zusammenhängend, so dass es eine zusammenhängende Kette  $Q_{i_1} =: Q_{\nu_1}, Q_{\nu_2}, \dots, Q_{\nu_r} := Q_{i_2} \subseteq \diamond_{i-1}$  von Vierecken geben muss. Also enthält  $\diamond_i$  einen geschlossenen Kreis  $Q_{\nu_1}, Q_{\nu_2}, \dots, Q_{\nu_r}, Q_i$ . Da  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$  und  $\overline{v_{i,4}v_{i,1}}$  keine Kanten von  $\diamond_{i-1}$  sind, enthält dieser Kreis ein Loch, so dass  $\Theta_4 > 0$  gilt.

Der folgende Satz beschreibt ein Interpolationsschema für die Unterteilung mit Clough-Tocher Elementen. Hierzu definieren wir zunächst die Unterteilung eines Vierecks  $Q_i := \triangle(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4})$ . Wir teilen jedes Viereck durch Einzeichnen einer Diagonale  $e_{i,0}$  in zwei Dreiecke  $T_{i,1}$  und  $T_{i,2}$ . Gilt  $\theta_i \in \{2, 3\}$ , dann wird das Dreieck mit den meisten gemeinsamen Kanten zur Teilquadrangulierung  $\diamond_{i-1}$  nach Clough-Tocher unterteilt.

Haben beide Dreiecke eine gemeinsame Kante zur Teilquadrangulierung, dann wird  $T_{i,2}$  nach Clough-Tocher unterteilt. Für  $\theta_i \leq 1$  enthält  $Q_i$  somit zwei und für  $\theta_i \geq 2$  vier Dreiecke und wir bezeichnen die Menge der Dreiecke in  $Q_i$  mit  $\tilde{Q}_i$ .

Für diese Unterteilung definieren wir die Triangulierung

$$\tilde{\Delta} := \bigcup_{i=1}^N \tilde{Q}_i$$

Die Abbildung 4.2 zeigt die Unterteilung  $\tilde{\Delta}$  für eine Quadrangulierung mit acht Vierecken.

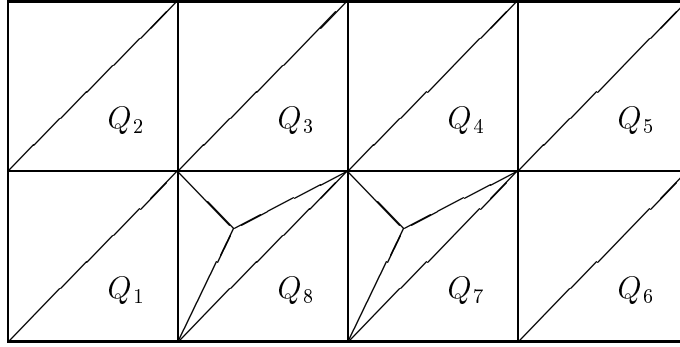


Abbildung 4.2: Unterteilung einer Quadrangulierung

Mit den Ergebnissen aus Kapitel 3 erhalten wir direkt den folgenden Hermite-Interpolanten.

**Satz 4.2.** Sei  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\rho = \lfloor \frac{3r}{2} \rfloor$ ,  $d = 2\rho + 1$  und  $f \in C^{2r}(\Omega)$ , dann gibt es einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta})$ , der die folgenden Interpolationsbedingungen erfüllt:

(i) Für jeden Eckpunkt  $v_i \in \Delta$  und  $\mu + \nu \leq \rho$  gelte:

$$D_x^\mu D_y^\nu s(v_i) = D_x^\mu D_y^\nu f(v_i)$$

(ii) Sei  $Q_i = \diamond(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4})$  ein Viereck und

$$T_{i,1} = \begin{cases} \triangle(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}) & \text{falls } e_{i,0} = \overline{v_{i,1}v_{i,3}} \\ \triangle(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,4}) & \text{falls } e_{i,0} = \overline{v_{i,1}v_{i,4}} \end{cases}$$

$$T_{i,2} = \begin{cases} \triangle(v_{i,1}, v_{i,3}, v_{i,4}) & \text{falls } e_{i,0} = \overline{v_{i,1}v_{i,3}} \text{ und } \theta_i < 3 \\ \triangle(v_{i,4}, v_{i,1}, v_{i,3}) & \text{falls } e_{i,0} = \overline{v_{i,1}v_{i,3}} \text{ und } \theta_i = 3 \\ \triangle(v_{i,4}, v_{i,2}, v_{i,3}) & \text{falls } e_{i,0} = \overline{v_{i,2}v_{i,4}} \end{cases}$$

Für  $T_{i,1}$  und  $T_{i,2}$  gelten die folgenden Bedingungen gemäß Satz 3.6 (ii) und (iii):

- (a) Ist  $\theta_i = 0$ , dann gelten für  $T_{i,1}$  die Bedingungen für  $\theta_{i,1} = 0$  und für  $T_{i,2}$  die Bedingungen für  $\theta_{i,2} = 1$ .
- (b) Ist  $\theta_i = 1$ , dann gelten für  $T_{i,1}$  und  $T_{i,2}$  die Bedingungen für  $\theta_{i,1} = \theta_{i,2} = 1$ .
- (c) Ist  $\theta_i = 2$  und  $e_{i,0} = \overline{v_{i,1}v_{i,3}}$ , dann gelten für  $T_{i,1}$  die Bedingungen für  $\theta_{i,1} = 2$  und für  $T_{i,2}$  die Bedingungen für  $\theta_{i,2} = 1$ .
- (d) Ist  $\theta_i = 2$  und  $e_{i,0} = \overline{v_{i,2}v_{i,4}}$ , dann gelten für  $T_{i,1}$  die Bedingungen für  $\theta_{i,1} = 1$  und für  $T_{i,2}$  die Bedingungen für  $\theta_{i,2} = 2$ .
- (e) Ist  $\theta_i = 3$  und  $e_{i,0} = \overline{v_{i,1}v_{i,3}}$ , dann gelten für  $T_{i,1}$  die Bedingungen für  $\theta_{i,1} = 3$  und für  $T_{i,2}$  die Bedingungen für  $\theta_{i,2} = 1$ .
- (f) Ist  $\theta_i = 3$  und  $e_{i,0} = \overline{v_{i,2}v_{i,4}}$ , dann gelten für  $T_{i,1}$  die Bedingungen für  $\theta_{i,1} = 1$  und für  $T_{i,2}$  die Bedingungen für  $\theta_{i,2} = 3$ .

Für den Interpolanten aus Satz 4.2 gelten somit die Ergebnisse aus Kapitel 3. Insbesondere besitzt er für gerades  $r$  die optimale Approximationsordnung  $d + 1$ . Für  $r$  ungerade hängt die Approximationsordnung wieder von der längsten Kette von Vierecken mit  $\theta_i = 1$  ab. Wie wir im vorherigen Kapitel bereits gesagt haben, ist die Anzahl in der Regel proportional zu  $h^{-1}$ . Der Interpolant hat somit zumindest die Approximationsordnung  $d$ .

$Q_5$	$Q_{21}$	$Q_{11}$	$Q_{25}$	$Q_{17}$
$Q_4$	$Q_{20}$	$Q_{10}$	$Q_{24}$	$Q_{16}$
$Q_3$	$Q_{19}$	$Q_9$	$Q_{23}$	$Q_{15}$
$Q_2$	$Q_{18}$	$Q_8$	$Q_{22}$	$Q_{14}$
$Q_1$	$Q_6$	$Q_7$	$Q_{12}$	$Q_{13}$

$Q_4$	$Q_{17}$	$Q_9$	$Q_{20}$	$Q_{14}$	$Q_{24}$
$Q_3$	$Q_{16}$	$Q_8$	$Q_{19}$	$Q_{13}$	$Q_{22}$
$Q_2$	$Q_{15}$	$Q_7$	$Q_{18}$	$Q_{12}$	$Q_{23}$
$Q_1$	$Q_5$	$Q_6$	$Q_{10}$	$Q_{11}$	$Q_{21}$

Abbildung 4.3: Nummerierung für Rechteckspartition

Wir behandeln nun den Fall einer Rechteckspartition mit  $n$  Zeilen und  $m$  Spalten und beschreiben hierfür eine minimale Unterteilung. Die Abbildung 4.3 zeigt zwei Rechteckspartitionen mit einer geeigneten Nummerierung der Vierecke. Es zeigt sich, dass wir hier die gleiche Unterteilung wie für eine  $\Delta^1$ -Partition nach Korollar 3.21 erhalten. Wir definieren hierzu die Indizes der Vierecke  $Q_i$  wie folgt: Ist  $m$  ungerade und  $Q_i$  das

Viereck in der Zeile  $k$  und Spalte  $l$ , dann setzen wir

$$i := \begin{cases} (n+1) \frac{k-1}{2} + l & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ (n+1) \frac{k}{2} & \text{falls } k \text{ gerade und } l = 1 \\ (n+1) \frac{m+1}{2} + (n-1) \frac{k-2}{2} + l - 1 & \text{falls } k \text{ gerade und } l \neq 1 \end{cases}$$

Analog wird  $i$  für  $n$  ungerade definiert. Sind  $n$  und  $m$  gerade, dann definieren wir

$$i := \begin{cases} (n+1) \frac{k-1}{2} + l & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ (n+1) \frac{k}{2} & \text{falls } k \text{ gerade, } k \neq n \text{ und } l = 1 \\ (n+1) \frac{m}{2} + (n-1) \frac{k-2}{2} + l - 1 & \text{falls } k \text{ gerade, } k \neq n \text{ und } l \neq 1 \\ n(m-1) + \frac{l+1}{2} & \text{falls } k = n \text{ und } l \text{ ungerade} \\ n(m-1) + \frac{n}{2} + \frac{l}{2} & \text{falls } k = n \text{ und } l \text{ gerade} \end{cases}$$

Ist  $n$  oder  $m$  ungerade, dann erhalten wir eine Nummerierung mit  $\Theta_0 = 1$  und  $\Theta_2 = \Theta_4 = 0$ . Falls  $n$  und  $m$  gerade sind, dann gilt  $\Theta_0 = \Theta_2 = 1$  und  $\Theta_4 = 0$ . Somit enthält die Unterteilung  $\tilde{\Delta}$  genauso viele Dreiecke wie die Unterteilung für eine  $\Delta^1$ -Partition und ist nach Korollar 3.21 optimal.

#### 4.1.2 Unterteilung nach Lai und Schumaker

In diesem Abschnitt behandeln wir eine Unterteilung, die Lai und Schumaker [98] für die Interpolation mit  $C^2$ -Splines auf Quadrangulierungen verwendet haben. Bei dieser Unterteilung wird jedes Viereck  $Q_i$  in vier Dreiecke unterteilt (siehe Abbildung 4.4).

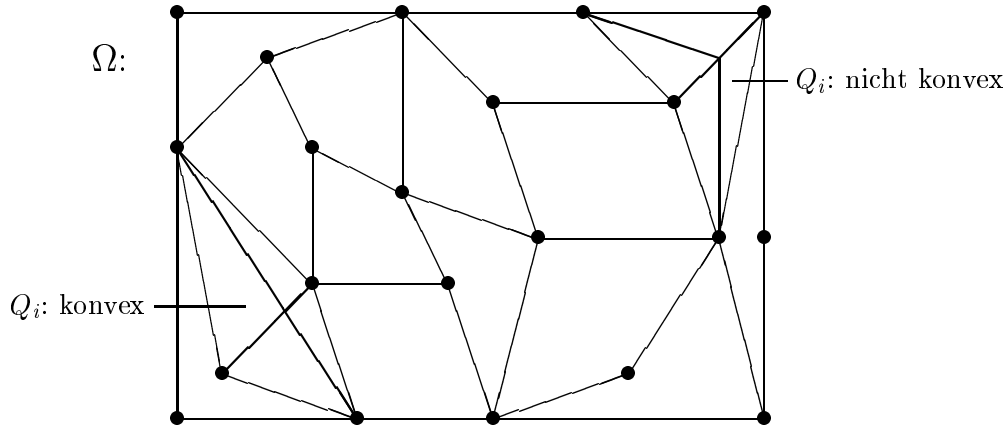


Abbildung 4.4: Unterteilung nach Lai und Schumaker

Die Unterteilung eines Vierecks  $Q_i$  erhalten wir wie folgt:



- (i) Ist  $Q_i$  konvex, dann fügt man beide Diagonalen in  $Q_i$  hinzu.
- (ii) Ist  $Q_i$  nicht konvex, dann werden die Diagonale innerhalb von  $Q_i$ , sowie zwei Kanten von den übrigen Eckpunkten zum Mittelpunkt der Diagonale hinzugefügt.

Im Folgenden bezeichnen wir mit  $\diamond$  die Triangulierung, die wir durch diese Unterteilung erhalten. Wie Lai und Schumaker [98] wollen wir ausschließen, dass es zwei benachbarte Vierecke  $\diamond(v_1, v_2, v_3, v_4)$  und  $\diamond(v_1, v'_2, v_3, v_4)$  gibt, bei denen die Kanten  $\overline{v_1 v_4}$  und  $\overline{v_3 v_4}$  kollinear, aber die beiden Kanten  $\overline{v_2 v_4}$  und  $\overline{v'_2 v_4}$  nicht kollinear sind. In diesem Fall kann man eine Modifikation der Quadrangulierung durch Tauschen von Kanten vornehmen, indem die Kanten  $\overline{v_1 v_4}$  und  $\overline{v_3 v_4}$  durch die beiden Kanten  $\overline{v_2 v_4}$  und  $\overline{v'_2 v_4}$  ersetzt werden (siehe Abbildung 4.5). Die neue Quadrangulierung enthält nun ein konvexes und ein nicht-konvexes Viereck.

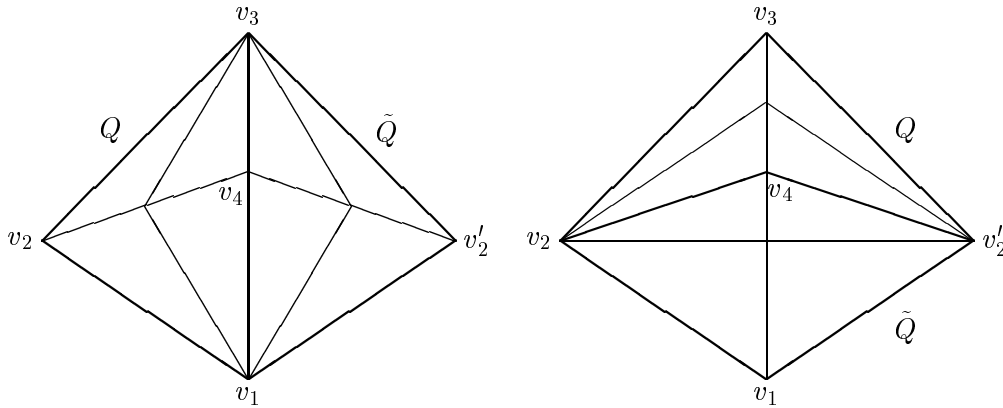


Abbildung 4.5: Tauschen von kollinearen Kanten

Wir konstruieren nun Hermite-Interpolationsverfahren mit  $C^1$ - und  $C^2$ -Splines für die Unterteilung nach Lai und Schumaker. Zunächst behandeln wir den Fall  $S_3^1(\diamond)$  und beschreiben eine minimale bestimmende Menge für diesen Splineraum. Aus dieser können wir dann, wie in Kapitel 3 ein Hermite-Interpolationsschema ableiten. Wir betrachten nun ein konvexes Viereck. Für diesen Fall erhalten wir nach Lai [96] die folgende bestimmende Menge.

**Lemma 4.3.** *Sei  $Q = \diamond(v_1, v_2, v_3, v_4)$  ein konvexes Viereck mit dem inneren Eckpunkt  $v_5$  und  $T_i := \triangle(v_i, v_{i+1}, v_5)^2$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , die vier Dreiecke in  $Q$ . Dann ist*

$$\mathcal{D} := \{P_{300}^i, P_{210}^i, P_{201}^i, P_{111}^i : i = 1, 2, 3, 4\}$$

*eine minimale bestimmende Menge von  $S_3^1(\{T_1, \dots, T_4\})$ .*

---

<sup>2</sup>Analog zu Kapitel 3 setzen wir hier  $i + 1$  gleich 1 für  $i = 4$ . Diese Konvention werden wir auch im Folgenden verwenden.

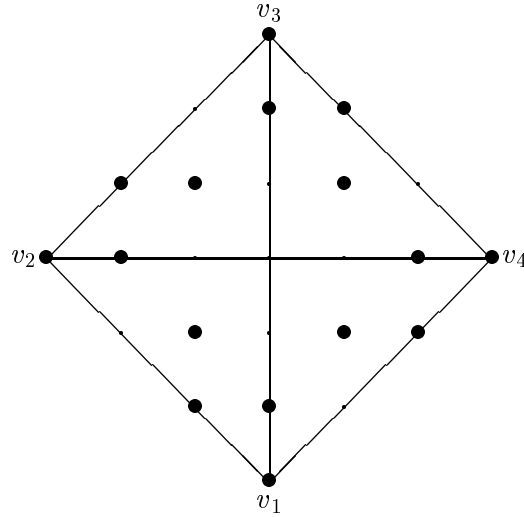


Abbildung 4.6: Bestimmende Menge für konvexes Viereck

Die Abbildung 4.6 zeigt die minimale bestimmende Menge für ein konvexes Viereck. Als nächstes betrachten wir nicht-konvexe Vierecke. Mit dem folgenden Lemma erhalten wir hierfür eine bestimmende Menge für  $S_3^1(\{T_1, \dots, T_4\})$ .

**Lemma 4.4.** *Sei  $Q = \diamond(v_1, v_2, v_3, v_4)$  ein nicht-konvexes Viereck mit dem inneren Eckpunkt  $v_5$  und  $T_i := \triangle(v_i, v_{i+1}, v_5)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , die vier Dreiecke in  $Q$ . Dann ist*

$$\mathcal{D} := \{P_{300}^i, P_{210}^i, P_{201}^i, P_{111}^i : i = 1, 2, 3, 4\} \setminus \{P_{111}^4\}$$

eine minimale bestimmende Menge von  $S_3^1(\{T_1, \dots, T_4\})$ .

**Beweis:** Es seien alle Koeffizienten der Bernstein-Bézier-Punkte aus  $\mathcal{D}$  gleich 0. Wir nehmen zunächst an, dass  $\angle v_3 v_4 v_1 \neq 180^\circ$  gilt. Die beiden kollinearen Kanten seien  $\overline{v_2 v_5}$  und  $\overline{v_4 v_5}$  (siehe Abbildung 4.7). Die Koeffizienten  $c_{120}^i$  berechnen sich direkt aus der  $C^1$ -Bedingung an den Eckpunkten von  $Q$ . Nach Voraussetzung sind alle Kanten  $\overline{v_i v_{i+1}}$  und  $\overline{v_{i+1} v_{i+2}}$  nicht kollinear, so dass man die Koeffizienten  $c_{012}^1$  und  $c_{012}^2$  aus den  $C^1$ -Bedingungen über die inneren Kanten erhält.

Somit verbleiben noch vier Koeffizienten, die in Abbildung 4.7 mit  $a_1, a_2, a_3, a_4$  bezeichnet sind. Seien  $\lambda$  die baryzentrischen Koordinaten von  $v_1$  bezüglich  $T_3$  und  $\mu$  die baryzentrischen Koordinaten von  $v_4$  bezüglich  $T_1$ , dann ergibt sich aus den  $C^1$ -Bedingungen über die Kanten  $\overline{v_3 v_5}$  und  $\overline{v_4 v_5}$  das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mu_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\mu_3 \\ 1 & -\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 1 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0$$

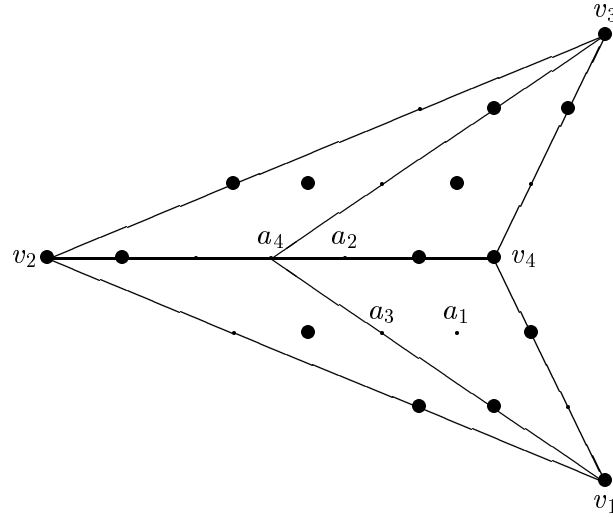


Abbildung 4.7: Bestimmende Menge für nicht-konvexes Viereck

Für die Koeffizientenmatrix erhalten wir die Determinante  $-\lambda_2 \mu_3^2$ . Da die Kanten  $\overline{v_2 v_5}$  und  $\overline{v_4 v_5}$  kollinear sind, gilt  $\mu_3 \geq 1$ . Umgekehrt sind die Kanten  $\overline{v_1 v_5}$  und  $\overline{v_3 v_5}$  nicht kollinear, so dass  $\lambda_2 \neq 0$  gilt. Also ist die Determinante ungleich 0 und es folgt  $a_i = 0$  für  $i = 1, 2, 3, 4$ . Somit ist  $\mathcal{D}$  eine bestimmende Menge und wegen

$$\dim S_3^1(\{T_1, T_2, T_3, T_4\}) = 15 = |\mathcal{D}|$$

minimal.

Sei nun  $\angle v_3 v_4 v_1 = 180^\circ$  (siehe Abbildung 4.8). Die Koeffizienten  $c_{120}^i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  und  $c_{012}^i$ ,  $i = 1, 2$  berechnen sich wie im ersten Fall. Da die Kanten  $\overline{v_1 v_4}$  und  $\overline{v_3 v_4}$  kollinear sind, erhält man direkt den Koeffizienten  $c_{111}^4$  aus der  $C^1$ -Bedingung über die Kante  $\overline{v_4 v_5}$ . Die verbleibenden drei Koeffizienten  $c_{012}^4$ ,  $c_{102}^4$  und  $c_{003}^4$  ergeben sich nun aus den  $C^1$ -Bedingungen über die Kanten  $\overline{v_1 v_5}$  und  $\overline{v_4 v_5}$ . Also ist  $\mathcal{D}$  eine bestimmende Menge und es folgt wiederum aus

$$\dim S_3^1(\{T_1, T_2, T_3, T_4\}) = 15 = |\mathcal{D}|$$

dass  $\mathcal{D}$  minimal ist. □

Wir werden nun ein Interpolationsschema für  $S_3^1(\diamond)$  angeben. Hierzu müssen wir zunächst eine geeignete Nummerierung der Vierecke von  $\diamond$  wählen. Aus Lemma 4.4 wird deutlich, daß  $\theta_i \leq 3$  für ein nicht-konvexes Viereck  $Q_i$  gelten muss. Gilt nämlich  $\theta_i = 4$ , dann sind durch die  $C^1$ -Bedingungen an den Kanten und in den Eckpunkten alle Bernstein-Bézier-Koeffizienten  $c_\alpha$  mit  $\alpha_3 \leq 1$  bestimmt. Somit ist auch der Koeffizient  $c_{111}^{i,4}$  im Dreieck  $T_{i,4}$  bestimmt. Für ein nicht-konvexes Viereck berechnet sich dieser aber nach Lemma 4.4 aus den übrigen 15 Koeffizienten.

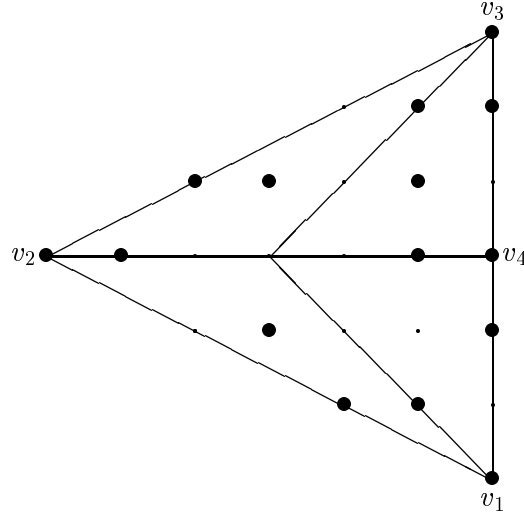


Abbildung 4.8: Bestimmende Menge für ein Viereck mit kollinearen Kanten

Nach den Bemerkungen in Abschnitt 4.1.1 können wir immer eine Nummerierung mit  $\theta_i \leq 3$  für alle Vierecke  $Q_i$  finden. Lemma 4.4 besagt jedoch, dass die Nummerierung eine zusätzliche Bedingung erfüllen muss. In dem Lemma haben wir gefordert, dass die zwei anliegenden Kanten in den Eckpunkten  $v_{i,1}$ ,  $v_{i,2}$  und  $v_{i,3}$  nicht kollinear sein dürfen. Nur die beiden Kanten im Eckpunkt  $v_{i,4}$  dürfen kollinear sein. Offensichtlich kann ein Viereck maximal einen Winkel mit  $180^\circ$  haben. Somit ist zu klären, ob man eine Nummerierung der Vierecke finden kann, so dass dieser Winkel für ein Viereck  $Q_i$  immer am Rand der Teilquadrangulierung  $\diamond_i$  liegt. Dies ist offensichtlich nicht möglich, wenn die beiden kollinearen Kanten gemeinsame Kanten von zwei Vierecken  $Q_i$  und  $Q_j$  sind (siehe Abbildung 4.9).

In der Einleitung zu dem Kapitel haben wir gezeigt, dass man die Kanten tauschen kann, wenn die beiden anderen Kanten nicht kollinear sind. Andernfalls ist  $v_{i,4}$  ein singulärer Eckpunkt, so dass die Dimension um eins anwächst. Wir können deshalb den Koeffizienten  $c_{111}^{i,4}$  im vierten Dreieck zusätzlich wählen. Wir erhalten für diesen Fall folgende bestimmende Menge.

**Lemma 4.5.** *Seien  $Q_i = \diamond(v_1, v_2, v_3, v_4)$  und  $Q_j = \diamond(v_1, v'_2, v_3, v_4)$  zwei Vierecke, so dass  $v_4$  ein singulärer Eckpunkt in  $\diamond$  ist. Dann ist*

$$\mathcal{D} := \left\{ P_{300}^{k,m}, P_{210}^{k,m}, P_{201}^{k,m}, P_{111}^{k,m} : k = i, j; m = 1, 2 \right\} \cup \left\{ P_{030}^{i,3}, P_{120}^{i,3}, P_{021}^{i,3}, P_{111}^{i,3} \right\}$$

eine minimale bestimmende Menge für  $S_3^1(\diamond)$  auf  $Q_i \cup Q_j$ .

**Beweis:** Die Aussage folgt direkt aus Lemma 4.3 und 4.4 und Satz 2.10.  $\square$

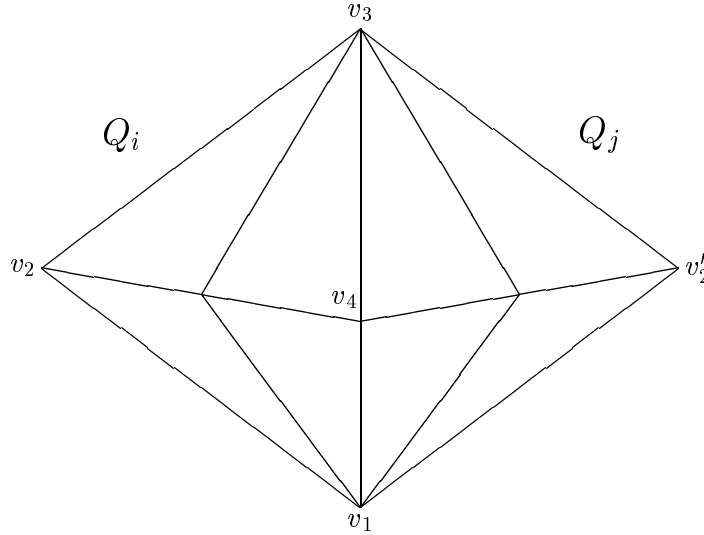


Abbildung 4.9: Zwei Vierecke mit kollinearen Kanten

Die Abbildung 4.10 zeigt die minimale bestimmende Menge aus Lemma 4.5.

Elemente mit einem singulären Eckpunkt können wir somit in einem Schritt behandeln, und wir wählen im Folgenden eine Nummerierung der Vierecke, so dass die beiden zugehörigen Vierecke aufeinanderfolgende Indizes haben. Anhand der minimalen bestimmenden Menge aus Abbildung 4.10 sieht man, dass sich diese Elemente wie konvexe Vierecke verhalten. In beiden Fälle können wir es zulassen, dass die bestehende Teilquadrangulierung bereits alle vier äußeren Kanten des Elements enthält. Konvexe Vierecke und Elemente mit einem singulären Eckpunkt können somit beliebig in eine bestehende Teilquadrangulierung eingefügt werden. Wir wählen deshalb eine Nummerierung, bei der alle nicht konvexen Vierecke einen niedrigeren Index als die konvexen Vierecke und Paare mit einem singulären Eckpunkt besitzen. Für die Untersuchung der nicht konvexen Vierecke wollen wir deshalb annehmen, dass eine Teilquadrangulierung gegeben ist, die nur noch nicht-konvexe Vierecke enthält. Diese Teilquadrangulierung kann natürlich Löcher haben. Im folgenden Lemma zeigen wir nun, dass man für solche Teilquadrangulierungen immer ein Viereck finden kann, dessen kollineare Kanten am Rand liegen.

**Lemma 4.6.** *Sei  $\diamond_k = \{Q_1, \dots, Q_k\}$  eine Teilquadrangulierung von  $\diamond$ , die keine konvexen Vierecke oder Paare von Vierecken mit einem singulären Eckpunkt enthält. Dann gibt es ein äußeres Viereck  $Q_i$ , so dass entweder alle vier Kanten nicht kollinear sind oder eine der beiden kollinearen Kanten am Rand von  $\diamond_k$  liegt.*

**Beweis:** Angenommen es gäbe eine Quadrangulierung, die die Bedingung nicht erfüllt. Seien  $\{R_1, \dots, R_m\} \subseteq \diamond$  die Vierecke mit mindestens einer äußeren Kante, dann muss

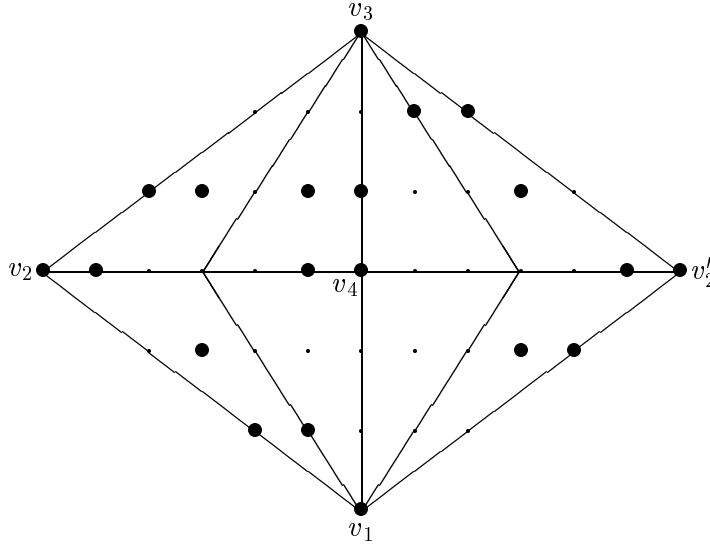


Abbildung 4.10: Element mit singulärem Eckpunkt

$R_i$  zwei kollineare Kanten besitzen, die keine äußeren Kanten von  $\diamond$  sind. Die Eckpunkte von  $R_i$  seien wieder wie in Lemma 4.4 nummeriert. Es lassen sich nun zwei Fälle unterscheiden:

- (i) Die beiden Kanten  $\overline{v_1 v_2}$  und  $\overline{v_2 v_3}$  sind äußere Kanten. Die beiden anderen Kanten sind innere Kanten.
- (ii) Nur eine Kante  $\overline{v_1 v_2}$  oder  $\overline{v_2 v_3}$  ist eine äußere Kante.

Betrachten wir den ersten Fall, dann zeigt sich, dass  $v_1$  und  $v_3$  äußere Eckpunkte zweier weiterer Vierecke  $R_j$  und  $R_k$  sein müssen. Andernfalls sind die Voraussetzungen nicht erfüllt, da eine der beiden kollinearen Kanten  $\overline{v_1 v_4}$  bzw.  $\overline{v_3 v_4}$  eine äußere Kante wäre. Entsprechende Aussagen erhält man im zweiten Fall für die Eckpunkte  $v_1$  und  $v_2$  bzw.  $v_2$  und  $v_3$ . Wir definieren einen Graphen  $G = (V, E)$  mit den Knoten  $V = \{R_1, \dots, R_m\}$  und den Kanten  $E$ . Hierbei gilt  $(R_j, R_k) \in E$  genau dann, wenn  $R_j$  und  $R_k$  einen gemeinsamen äußeren Eckpunkt haben. Aus den obigen Überlegungen folgt, dass jeder Knoten von  $G$  genau zwei Kanten besitzt. Also hat  $G$  einen Zyklus  $R_{i_1}, R_{i_2}, \dots, R_{i_k}, R_{i_1}$ , so dass die zugehörige Quadrangulierung ein Polygon  $P$  umschließt (siehe Abbildung 4.11). Wegen der Voraussetzung können die kollinearen Seiten zweier Vierecke  $R_{i_j}$  und  $R_{i_{j+1}}$  nicht zusammenfallen. Somit muss  $k \geq 3$  gelten. Also besitzt  $P$  einen konvexen Eckpunkt (siehe  $v$  in Abbildung 4.11), dessen angrenzende Kanten  $\overline{vw_1}$  und  $\overline{vw_2}$  nach Voraussetzung keine äußeren Kanten der Quadrangulierung sein dürfen. In allen drei Eckpunkten sind die Winkel der anliegenden Kanten kleiner oder gleich  $180^\circ$ , wobei mindestens ein Winkel echt kleiner ist. Fügt man nun im Eckpunkt ein Viereck  $Q$  an,

so gibt es zwei Möglichkeiten, die in Abbildung 4.12 dargestellt sind.<sup>3</sup>

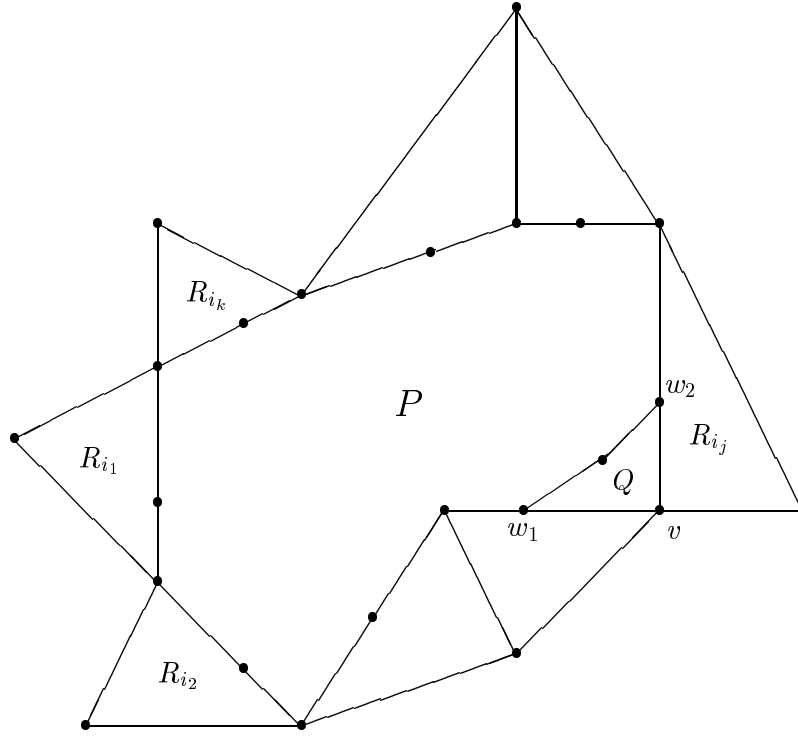
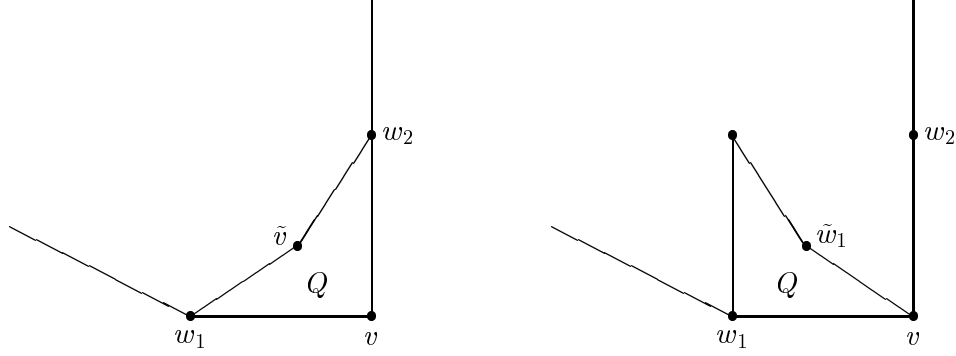


Abbildung 4.11: Äußere Vierecke einer Teilquadrangulierung

Sei  $\tilde{P} = P \setminus Q$ , dann entsteht im ersten Fall für  $v$  ein neuer Eckpunkt  $\tilde{v}$ , während  $v$  in dem anderen Fall erhalten bleibt. In beiden Fällen gelten jedoch für das neue Polygon  $\tilde{P}$  im Eckpunkt  $v$  bzw.  $\tilde{v}$  die gleichen Bedingungen wie für  $P$ . Dies wiederholt man, bis alle Vierecke von  $\diamond$  angefügt wurden. Schließlich müssen mindestens zwei Kanten auf der nicht-konvexen Seite eines Vierecks am Rand von  $\diamond$  liegen. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

Mit Hilfe von Lemma 4.6 können wir nun eine minimale bestimmende Menge für den Spliner Raum  $S_3^1(\diamond)$  angeben. Hierzu wird zunächst eine geeignete Nummerierung der Vierecke gewählt. Im ersten Schritt entfernen wir alle konvexen Vierecke und Paare von Vierecken mit einem singulären Eckpunkt aus der Quadrangulierung. Die verbleibende Teilquadrangulierung erfüllt somit die Voraussetzungen für Lemma 4.6. Nach dem Lemma gibt es nun ein äußeres Viereck, so dass entweder alle Kanten paarweise nicht kollinear sind, oder eine kollineare Kante am Rand der Teilquadrangulierung liegt. Dieses Viereck wird entfernt und anschließend mit der verbleibenden Quadrangulierung

<sup>3</sup>Als Sonderfall kann das Viereck  $Q$  auch zwei kollineare Kanten in  $\tilde{v}$  bzw.  $\tilde{w}_1$  haben.

Abbildung 4.12: Anfügen eines Vierecks  $Q$ 

gulierung fortgefahren, bis alle Vierecke entfernt wurden. Die umgekehrte Reihenfolge, in der wir die Vierecke entfernt haben, definiert nun die Nummerierung der Vierecke. Hiermit erhalten wir den folgenden Satz.

**Satz 4.7.** *Sei  $\diamond = \{Q_1, \dots, Q_N\}$  eine Quadrangulierung, deren Vierecke nach dem oben beschriebenen Verfahren nummeriert sind. Wir definieren die Menge  $\mathcal{D}$ , bestehend aus den folgenden Bernstein-Bézier-Punkten:*

- (i) *Sei  $v$  ein Eckpunkt von  $\diamond$  und  $T_i$  ein Dreieck von  $\diamond$  mit Eckpunkt  $v$ . Dann wähle man die drei Punkte in  $D_1(v) \cap T_i$ .*
- (ii) *Sei  $e$  eine Kante von  $\diamond$ ,  $Q_i$  das Viereck mit Kante  $e$ , das den kleinsten Index besitzt und  $T_{i,j}$  das Dreieck in  $Q_i$  mit Kante  $e$ . Ist  $Q_i$  konvex, dann wähle man den Punkt  $P_{111}^{i,j}$ . Ist  $Q_i$  nicht konvex, dann nummerieren wir die Kanten  $e_{i,1}, e_{i,2}, e_{i,3}, e_{i,4}$  von  $Q_i$  entsprechend der aufsteigenden Folge der benachbarten Vierecke von  $Q_i$ . Somit bezeichnet  $e_{i,1}$  die gemeinsame Kante zum benachbarten Viereck  $Q_{i,1}$  mit dem niedrigsten Index,  $e_{i,2}$  die gemeinsame Kante zum benachbarten Viereck  $Q_{i,2}$  mit dem nächst höheren Index usw. Gilt nun  $e \neq e_{i,4}$ , dann wähle man den Punkt  $P_{111}^{i,j}$ .*
- (iii) *Es seien  $Q_i$  und  $Q_k$  zwei benachbarte Vierecke mit einem singulären Eckpunkt  $v$ . Dann wähle man genau einen Punkt  $P_{111}^{i,j}$  in einem Dreieck  $T_{i,j}$  mit Eckpunkt  $v$ .*

Dann ist  $\mathcal{D}$  eine minimale bestimmende Menge von  $S_3^1(\diamond)$  und es gilt:

$$\dim S_3^1(\diamond) = 3V^\diamond + E^\diamond + S^\diamond - N_N^\diamond$$

**Beweis:** Wir zeigen zunächst, dass  $\mathcal{D}$  eine bestimmende Menge von  $S_3^1(\diamond)$  ist. Es seien alle Koeffizienten zu den Bernstein-Bézier-Punkten aus  $\mathcal{D}$  gleich 0.



Betrachten wir zunächst ein einzelnes Viereck  $Q$ . Für jeden Eckpunkt enthält  $\mathcal{D}$  nach (i) die drei Punkte aus  $D_1(v)$  in einem anliegenden Dreieck  $T_i$ . Aus der  $C^1$ -Bedingung in dem Eckpunkt folgt, dass alle Koeffizienten der Bernstein-Bézier-Punkte in  $D_1(v)$  gleich 0 sein müssen. Ist  $Q$  konvex, dann enthält  $\mathcal{D}$  nach (ii) für jede Kante von  $Q$  den mittleren Punkt  $P_{111}$  in einem der beiden angrenzenden Dreiecke. Durch die  $C^1$ -Bedingung über die gemeinsame Kante ist somit auch der Koeffizient  $c_{111}$  in dem anderen Dreieck bestimmt. Also sind alle Koeffizienten der minimalen bestimmenden Menge aus Lemma 4.3 und somit auch alle Koeffizienten aus  $Q$  gleich 0. Für ein nicht konvexes Viereck enthält  $\mathcal{D}$  nach (ii) für mindestens drei der vier Kanten den Bernstein-Bézier-Punkt  $P_{111}$  in einem anliegenden Dreieck. Besitzt  $Q$  zwei kollineare Kanten, so werden die Punkte aufgrund der Nummerierung nach Lemma 4.6 in den beiden Dreiecken auf der konvexen Seite gewählt. Also sind auch für diese Fälle alle Koeffizienten der Bernstein-Bézier-Punkte aus Lemma 4.4 gleich 0.

Als nächstes betrachten wir zwei Vierecke mit einem singulären Eckpunkt. Nach (i) werden für jeden Eckpunkt  $v$  der beiden Vierecke drei Punkte aus  $D_1(v)$  in einem anliegenden Dreieck  $T_i$  gewählt. Somit sind wegen der  $C^1$ -Bedingung im Eckpunkt wieder alle Koeffizienten der Bernstein-Bézier-Punkte in  $D_1(v)$  gleich 0. Nach (ii) enthält  $\mathcal{D}$  für jede äußere Kante den mittleren Punkt  $P_{111}$  in einem angrenzenden Dreieck. Aus der  $C^1$ -Bedingung über die gemeinsame Kante berechnet sich wieder der Koeffizient  $c_{111}$  in dem anderen Dreieck. Nach (iii) enthält  $\mathcal{D}$  einen Bernstein-Bézier-Punkt  $P_{111}$  in einem inneren Dreieck des Elements. Somit lassen sich alle Koeffizienten der minimalen bestimmenden Menge aus Lemma 4.5 berechnen.

Es gilt nun  $|\mathcal{D}| = 3V^\diamond + E - N_N^\diamond + S^\diamond$ . Aus Satz 2.10 erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dim S_3^1(\diamond) &\geq 3V_B + 2V_I + S + 1 \\ &= 10 - 7V_I + 3E_I + S \\ &= 10 - 7(V_I^\diamond + N^\diamond) + 3(E_I + 4N^\diamond) + (S^\diamond + N_K^\diamond) \\ &= 3V^\diamond + E^\diamond + S^\diamond - N_N^\diamond \end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{D}$  eine mininale bestimmende Menge.  $\square$

Mit der bestimmenden Menge aus Satz 4.7 erhalten wir nun den folgenden Hermite-Interpolanten für  $S_3^1(\diamond)$ .

**Satz 4.8.** *Sei  $f \in C^1(\Omega)$ , dann gibt es einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in S_3^1(\diamond)$ , der die folgenden Interpolationsbedingungen erfüllt:*

(i) *Für jeden Eckpunkt  $v_i \in \diamond$  gelte:*

$$\begin{aligned} s(v_i) &= f(v_i) \\ D_x s(v_i) &= D_x f(v_i) \\ D_y s(v_i) &= D_y f(v_i) \end{aligned}$$

- (ii) Für jede Kante  $e \in \diamond$  seien  $Q_i$  und  $e_{i,1}, e_{i,2}, e_{i,3}, e_{i,4}$  wie in Satz 4.7 (ii) definiert. Ist  $Q_i$  konvex oder gilt  $e \neq e_{i,4}$ , dann gelte für einen Punkt  $v$  im Innern der Kante  $e$  und einen Richtungsvektor  $z$ , der nicht parallel zu  $e$  verläuft:

$$D_z s(v) = D_z f(v)$$

- (iii) Für jeden singulären Eckpunkt  $v_i \in \diamond$  sei  $e$  eine Kante mit Eckpunkt  $v_i$ . Dann gelte für einen Punkt  $v$  im Innern der Kante  $e$  und einen Richtungsvektor  $z$ , der nicht parallel zu  $e$  verläuft:

$$D_z s(v) = D_z f(v)$$

**Beweis:** Offensichtlich ist die Anzahl der Bedingungen gleich  $3V^\diamond + E - N_N^\diamond + S^\diamond$ . Nach Satz 2.3 und 2.4 lassen sich die Bernstein-Bézier-Koeffizienten der minimalen bestimmenden Menge aus Satz 4.7 durch die Interpolationsbedingungen berechnen. Somit ist  $s$  eindeutig bestimmt.  $\square$

Für  $C^2$ -Splines haben Lai und Schumaker [98] den Fall  $S_6^2(\diamond)$  für ihre Unterteilung  $\diamond$  behandelt. Wir betrachten den Splineraum  $S_7^2(\diamond)$  und wählen den Unterraum

$$H_7^2(\diamond) := \{f \in S_7^2(\diamond) : f \in C^3(v), v \in \diamond\}$$

Für den Splineraum  $H_7^2(\diamond)$  entwickeln wir nun ein Hermite-Interpolationsverfahren. Wie im Fall  $S_3^1(\diamond)$  konstruieren wir zunächst bestimmende Mengen für einzelne Vierecke und für Elemente mit einem singulären Eckpunkt. Aus diesen bestimmenden Mengen leiten wir anschließend eine bestimmende Menge des Splineraums  $H_7^2(\diamond)$  ab. Zur Konstruktion der bestimmenden Menge wählen wir eine Nummerierung der Vierecke wie im Fall  $S_3^1(\diamond)$ .

Zunächst betrachten wir ein konvexes Viereck.

**Lemma 4.9.** Sei  $Q_i = \diamond(v_{i,1}, \dots, v_{i,4})$  ein konvexes Viereck mit dem inneren Eckpunkt  $v_{i,5}$  und  $T_{i,j} := \triangle(v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i,5})$  die vier Dreiecke in  $Q_i$ . Dann ist

$$\mathcal{D} := \bigcup_{j=1}^4 \left( \{P_\alpha^{i,j} : \alpha_1 \geq 4\} \cup \{P_{331}^{i,j}, P_{322}^{i,j}, P_{232}^{i,j}, P_{223}^{i,j}, P_{304}^{i,j}, P_{205}^{i,j}\} \right) \cup \{v_{i,5}\}$$

eine minimale bestimmende Menge für  $H_7^2(\{T_{i,1}, \dots, T_{i,4}\})$ .

**Beweis:** Aus den  $C^1$  und  $C^2$ -Bedingungen über die inneren Kanten des Vierecks sieht man, dass  $\mathcal{D}$  eine bestimmende Menge ist. Nach Satz 2.9 folgt

$$\dim H_7^2(\{T_{i,1}, \dots, T_{i,4}\}) = 65 = |\mathcal{D}|$$

so dass  $\mathcal{D}$  minimal ist.  $\square$

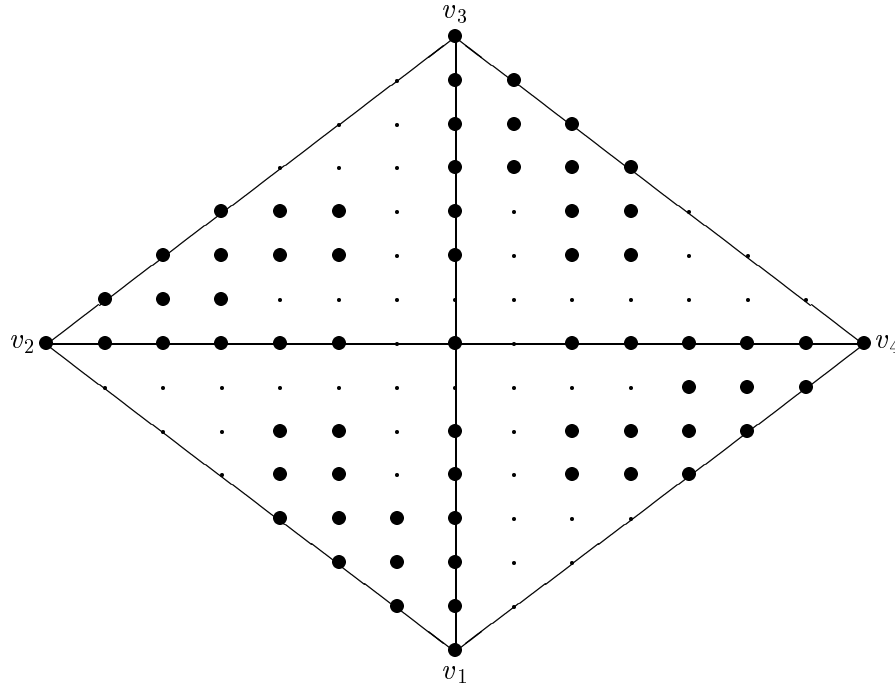


Abbildung 4.13: Bestimmende Menge für konvexes Viereck

Die Abbildung 4.13 zeigt die bestimmende Menge aus Lemma 4.9. Für nicht konvexe Vierecke müssen wir wieder die Fälle unterscheiden, ob die beiden Kanten  $\overline{v_{i,3}v_{i,4}}$  und  $\overline{v_{i,1}v_{i,4}}$  kollinear sind oder nicht. Das folgende Lemma beschreibt eine bestimmende Menge für solche Vierecke.

**Lemma 4.10.** *Sei  $Q_i = \diamond(v_{i,1}, \dots, v_{i,4})$  ein nicht konvexes Viereck mit dem inneren Eckpunkt  $v_{i,5}$  und  $T_{i,j} := \triangle(v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i,5})$  die vier Dreiecke in  $Q_i$ . Wir setzen*

$$\tilde{\mathcal{D}} := \bigcup_{j=1}^4 \left( \{P_{\alpha}^{i,j} : \alpha_1 \geq 4\} \cup \{P_{331}^{i,j}, P_{322}^{i,j}, P_{232}^{i,j}, P_{223}^{i,j}, P_{304}^{i,j}, P_{205}^{i,j}\} \right)$$

und

$$\mathcal{D} := \begin{cases} \tilde{\mathcal{D}} \setminus \{P_{205}^{i,3}\} & \text{falls } \angle v_{i,3}v_{i,4}v_{i,1} > 180^\circ \\ \tilde{\mathcal{D}} \setminus \{P_{232}^{i,4}\} & \text{falls } \angle v_{i,3}v_{i,4}v_{i,1} = 180^\circ \end{cases}$$

Dann ist  $\mathcal{D}$  eine minimale bestimmende Menge für  $H_7^2(\{T_{i,1}, \dots, T_{i,4}\})$ .

**Beweis:** Sei  $\angle v_{i,3}v_{i,4}v_{i,1} > 180^\circ$  und alle Koeffizienten der bestimmenden Menge  $\mathcal{D}$  gleich 0, dann ergeben sich alle, bis auf die in Abbildung 4.14 mit  $a_1, \dots, a_{12}$  bezeichneten Koeffizienten direkt aus den Differenzierbarkeitsbedingungen in den Eckpunkten

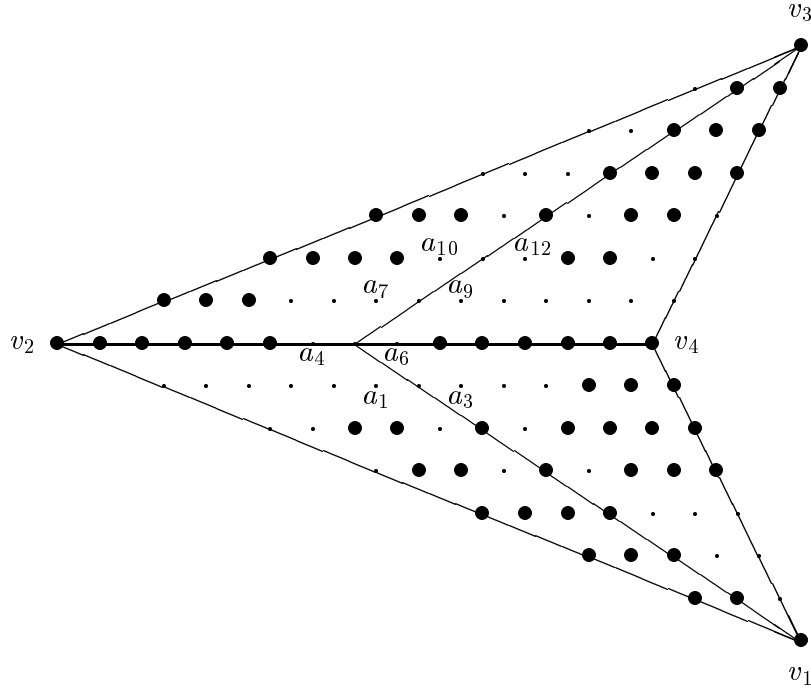


Abbildung 4.14: Bestimmende Menge für nicht-konvexes Viereck

und an den Kanten von  $Q_i$ . Seien  $\lambda$  die baryzentrischen Koordinaten von  $v_{i,3}$  bezüglich  $T_{i,1}$ ,  $\mu$  die baryzentrischen Koordinaten von  $v_{i,3}$  bezüglich  $T_{i,4}$  und  $\gamma$  die baryzentrischen Koordinaten von  $v_{i,4}$  bezüglich  $T_{i,2}$ , dann erhalten wir das Gleichungssystem  $Ma' = 0$  mit  $a := (a_1, \dots, a_{12})$  und

$$M := \begin{pmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \gamma_3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \gamma_3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \gamma_3 & -1 \\ 2\gamma_2\gamma_3 & \gamma_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma_2\gamma_3 & \gamma_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\gamma_2\gamma_3 & \gamma_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\gamma_2\gamma_3 & \gamma_3^2 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & \mu_3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\lambda_1\lambda_3 & 0 & 0 & \lambda_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1\lambda_3 & 0 & 2\lambda_2\lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt nun  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_2, \mu_3, \gamma_2 < 0$  und  $\lambda_3, \mu_1, \gamma_3 > 1$ , so dass

$$\det M = 2\gamma_2\gamma_3^8\lambda_2(\lambda_3\mu_2 - \lambda_1\mu_3) < 0$$

folgt. Also ist  $\mathcal{D}$  eine bestimmende Menge.

Für den Fall  $\angle v_{i,3}v_{i,4}v_{i,1} = 180^\circ$  benötigen wir kein Gleichungssystem. Wir können die Koeffizienten schrittweise aus den  $C^r$ -Bedingungen berechnen. Es ergeben sich zunächst alle, in Abbildung 4.15 mit  $\star$  gekennzeichneten Koeffizienten aus den Differenzierbarkeitsbedingungen an den Kanten und in den Eckpunkten. Anschließend lassen sich alle mit  $\circ$  bezeichneten Koeffizienten aus den  $C^1$ - und  $C^2$ -Bedingungen an den inneren Kanten bestimmen. Schließlich erhalten wir die übrigen, mit  $*$  gekennzeichneten Koeffizienten. Also ist  $\mathcal{D}$  wieder eine bestimmende Menge.

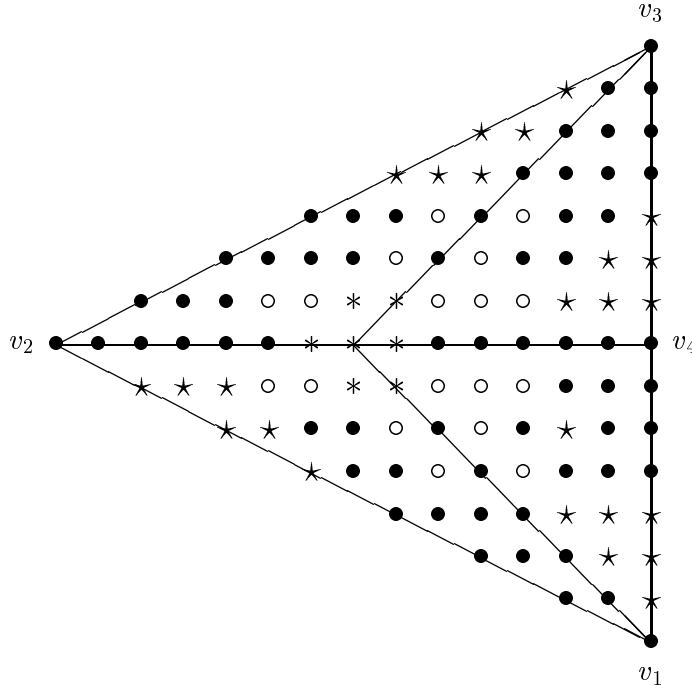


Abbildung 4.15: Bestimmende Menge für ein Viereck mit kollinearen Kanten

In beiden Fällen gilt nach Satz 2.9

$$\dim H_7^2(\{T_{i,1}, \dots, T_{i,4}\}) = 63 = |\mathcal{D}|$$

so dass  $\mathcal{D}$  minimal ist.  $\square$

Wie im Fall  $S_3^1(\diamond)$  müssen wir den Fall zweier Vierecke mit einem singulären Eckpunkt noch gesondert behandeln. Wir wählen für ein Viereck  $Q_i$  die gleiche bestimmende Menge wie in Lemma 4.10. Da der innere Eckpunkt des Elements singulär ist, können wir für das andere Viereck die bestimmende Menge so ergänzen, dass wir eine vollständige  $C^2$ -Interpolationsbedingung an den äußeren Kanten erhalten. Damit lassen sich diese Elemente wieder wie konvexe Vierecke behandeln. Wir erhalten das folgende Lemma für diesen Fall.

**Lemma 4.11.** Seien  $Q_i = \diamond(v_1, v_2, v_3, v_4)$  und  $Q_j = \diamond(v_1, v_2', v_3, v_4)$  zwei Vierecke, so dass  $v_4$  ein singulärer Eckpunkt in  $\diamond$  ist. Weiter sei  $\mathcal{D}_i$  die minimale bestimmende Menge nach Lemma 4.10 und

$$\mathcal{D}_j := \{P_\alpha^{j,2} : \alpha_1 \geq 4\} \cup \{P_{331}^{j,k}, P_{322}^{j,k}, P_{232}^{j,k} : k = 1, 2\} \\ \cup \{P_{223}^{j,k}, P_{304}^{j,k}, P_{205}^{j,k} : k = 1, 2, 3, 4\}$$

Dann ist  $\mathcal{D} := \mathcal{D}_i \cup \mathcal{D}_j$  eine minimale bestimmende Menge für  $H_7^2(\diamond)$  auf  $Q_i \cup Q_j$ .

**Beweis:** Die Aussage folgt wieder direkt aus Lemma 4.9 und 4.10 und Satz 2.10.  $\square$

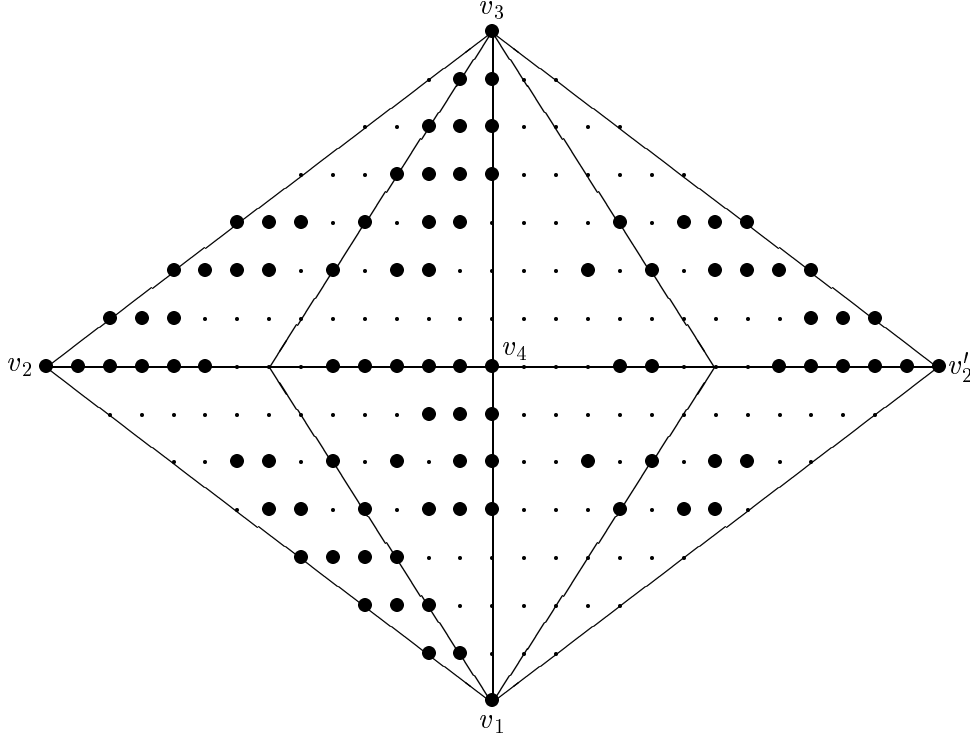


Abbildung 4.16: Element mit singulärem Eckpunkt

Die Abbildung 4.16 zeigt die bestimmende Menge aus Lemma 4.11. Mit Hilfe von Lemma 4.9 - 4.11 können wir nun einen Hermite-Interpolanten für den Splineraum  $H_7^2(\diamond)$  beschreiben. Hierzu wählen wir wieder die Nummerierung nach Lemma 4.6.

**Satz 4.12.** Sei  $f \in C^5(\Omega)$ , dann gibt es einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in H_7^2(\diamond)$ , der die folgenden Interpolationsbedingungen erfüllt:

(i) Für jeden Eckpunkt  $v_i \in \diamond$  und  $\mu + \nu \leq 3$  gelte:

$$D_x^\mu D_y^\nu s(v_i) = D_x^\mu D_y^\nu f(v_i)$$

- (ii) Für jede Kante  $e \in \diamond$  seien  $Q_i$  und  $e_{i,1}, e_{i,2}, e_{i,3}, e_{i,4}$  wie in Satz 4.7 (ii) definiert. Weiter sei  $z$  ein Richtungsvektor, der nicht parallel zu  $e$  verläuft und  $v_1, v_2, v_3$  drei Punkte auf  $e$  mit  $v_2 \neq v_3$ . Dann gelte

$$\begin{aligned} D_z s(v_1) &= D_z f(v_1) \\ D_z^2 s(v_2) &= D_z^2 f(v_2) \end{aligned}$$

Ist  $Q_i$  konvex oder  $e_{i,3}$  und  $e_{i,4}$  nicht kollinear oder  $e_{i,4} \neq e$ , dann gelte zusätzlich

$$D_z^2 s(v_3) = D_z^2 f(v_3)$$

- (iii) Ist  $Q_i$  konvex oder  $e_{i,3}$  und  $e_{i,4}$  nicht kollinear, dann gelte für  $j = 1, 2, 3, 4$ :

$$D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^3 D_{v_{i,j+1}-v_{i,j}}^2 s(v_{i,j}) = D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^3 D_{v_{i,j+1}-v_{i,j}}^2 s(v_{i,j})$$

Sind  $e_{i,3}$  und  $e_{i,4}$  kollinear, dann gelte:

$$\begin{aligned} D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^3 D_{v_{i,j+1}-v_{i,j}}^2 s(v_{i,j}) &= D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^3 D_{v_{i,j+1}-v_{i,j}}^2 s(v_{i,j}) & j = 1, 2 \\ D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^3 D_{v_{i,4}-v_{i,j}}^2 s(v_{i,j}) &= D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^3 D_{v_{i,4}-v_{i,j}}^2 s(v_{i,j}) & j = 1, 3 \end{aligned}$$

- (iv) Ist  $Q_i$  konvex oder  $e_{i,3}$  und  $e_{i,4}$  kollinear, dann gelte für  $\mu = 4, 5$  und  $j = 1, 2, 3, 4$ :

$$D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^\mu s(v_{i,j}) = D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^\mu f(v_{i,j})$$

Ist  $Q_i$  nicht konvex und  $e_{i,3}$  und  $e_{i,4}$  nicht kollinear, dann gelte

$$\begin{aligned} D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^\mu s(v_{i,j}) &= D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^\mu f(v_{i,j}) & \mu = 4, 5 \text{ und } j = 1, 2, 4 \\ D_{v_{i,5}-v_{i,3}}^4 s(v_{i,3}) &= D_{v_{i,5}-v_{i,3}}^4 f(v_{i,3}) \end{aligned}$$

- (v) Ist  $Q_i$  konvex, dann gelte

$$s(v_{i,5}) = f(v_{i,5})$$

**Beweis:** Mit Satz 2.3 und 2.4 folgt wieder, dass durch die Interpolationsbedingungen alle Koeffizienten der bestimmenden Menge aus Lemma 4.9 - 4.11 festgelegt sind. Bezeichnet  $M$  die Anzahl der Interpolationsbedingungen und  $N_D^\diamond$  die Anzahl der Vierecke mit kollinearen Kanten, dann folgt mit (4.1):

$$\begin{aligned} M &= 10V^\diamond + (3E^\diamond - N_D^\diamond) + 4N^\diamond + (8N_K^\diamond + 7N_{NK}^\diamond + N_D^\diamond) + N_K \\ &= 36 - 26(V_I^\diamond + N^\diamond) + 13(E_I^\diamond + 4N^\diamond) + S^\diamond + 3N_K^\diamond + N_{NK}^\diamond \end{aligned}$$

Also gilt  $\dim H_7^2(\diamond) = M$  nach Satz 2.10, so dass  $s$  eindeutig bestimmt ist.  $\square$

## 4.2 Konvexe Quadrangulierungen

Wie wir bereits bei der Unterteilung von Lai und Schumaker [98] gesehen haben, müssen wir bei Quadrangulierungen zwischen konvexen und nicht-konvexen Vierecken unterscheiden. In konvexe Vierecke kann man beide Diagonalen einzeichnen, so dass eine Unterteilung mit einem singulären Eckpunkt entsteht (siehe Abbildung 4.17). Diese Unterteilung nach Fraeijs de Veubeke und Sander (FVS) [67] zeichnet sich durch ein gutes Approximationsverhalten aus, da die Dimension durch den singulären Eckpunkt wächst. Konvexe Quadrangulierungen sind somit für die Interpolation mit Splinefunktionen besonders gut geeignet.

Für konvexe Quadrangulierungen haben Laghchim-Lahlou und Sablonnière [91] die Unterteilung nach Fraeijs de Veubeke und Sander gewählt und untersuchten die Interpolation mit Splines aus den Splineräumen  $S_d^{r,\rho}(\Delta)$  für  $\rho = \lfloor \frac{3r}{2} \rfloor$  und  $d = 2\rho + 1$ . Sie konstruieren einen Interpolanten, der in jedem Eckpunkt der Quadrangulierung alle Ableitungen bis zur Ordnung  $\rho$  interpoliert und lokal aus den Interpolationswerten berechnet werden kann.

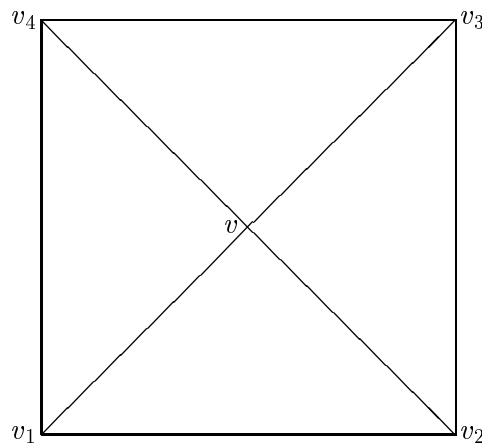


Abbildung 4.17: Unterteilung eines konvexen Vierecks

Durch die Unterteilung jedes Vierecks wird die Anzahl der Dreiecke gegenüber einer Triangulierung verdoppelt. Wie bei der Interpolation auf Triangulierungen erhält man eine effizientere Lösung, wenn nicht alle Vierecke in vier Dreiecke unterteilt werden. Bei unserer Methode, die wir in diesem Abschnitt vorstellen, werden wir die Art der Unterteilung wieder von der Anzahl der gemeinsamen Kanten mit der bestehenden Teilquadrangulierung abhängig machen. Hat ein Viereck maximal eine gemeinsame Kante mit der Teilquadrangulierung, dann genügt es, dieses durch Einzeichnen einer Diagonale in zwei Dreiecke zu unterteilen. Gibt es zwei oder mehr gemeinsame Kanten, dann benötigen wir dagegen die Unterteilung mit vier Dreiecken. Der Vorteil gegenüber



der Unterteilung mit Clough-Tocher Elementen aus Abschnitt 4.1.1 besteht nun darin, dass wir auch für ein Viereck  $Q_i$  mit  $\theta_i = 4$  nur eine Unterteilung mit vier Dreiecken verwenden müssen. Nach Gleichung (4.2) erhalten wir somit eine optimale Lösung für  $\Theta_0 = 1$  und  $\Theta_2 = \Theta_3 = 0$ . In diesem Fall benötigen wir nur  $V_I/3$  FVS-Elemente, so dass die Anzahl der Dreiecke nur um  $2V_I/3$  wächst.

Im Gegensatz zu den Ergebnissen aus Kapitel 3 muss allerdings für eine Quadrangulierung nicht immer eine Nummerierung mit  $\Theta_0 = 1$  optimal sein. Die Abbildung 4.18 zeigt eine solche Quadrangulierung. Für die gezeigte Nummerierung erhalten wir eine Unterteilung mit 16 Dreiecken. Jede Unterteilung mit  $\Theta_0 = 1$  benötigt dagegen zwei FVS-Elemente und somit 18 Dreiecke. Zur Vereinfachung der Bezeichnung wählen wir aber eine Nummerierung mit  $\Theta_0 = 1$ . Wie wir bereits gezeigt haben, können wir in diesem Fall die Eckpunkte eines Vierecks  $Q_i = \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4})$  so nummerieren, dass die Kanten  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}, \dots, \overline{v_{i,\theta_i}v_{i,\theta_i+1}}$  gemeinsame Kanten mit der Teilquadrangulierung  $\Diamond_{i-1}$  sind.

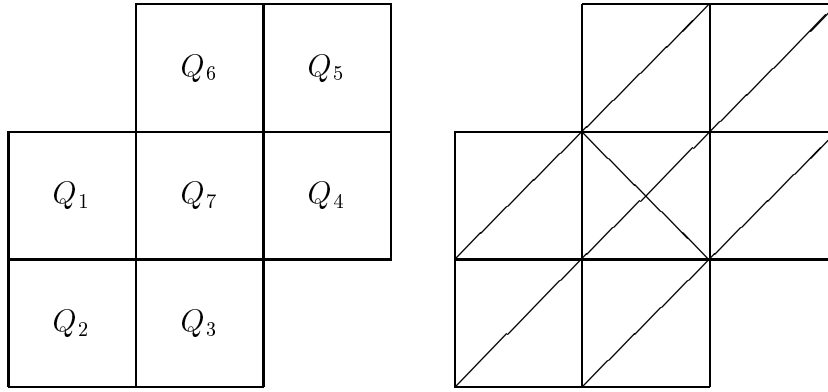


Abbildung 4.18: Optimale Nummerierung und zugehörige Unterteilung

Wir unterteilen nun ein Viereck  $Q_i$  mit  $\theta_i \leq 1$  durch Einzeichnen der Diagonale  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$  in die zwei Dreiecke  $T_{i,1} = \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$  und  $T_{i,2} = \Delta(v_{i,1}, v_{i,3}, v_{i,4})$ . Für ein Viereck  $Q_i$  mit  $\theta_i \geq 2$  fügen wir beide Diagonalen hinzu und erhalten eine Unterteilung mit den vier Dreiecken  $T_{i,j} = \Delta(v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i,5})$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , wobei  $v_{i,5}$  den singulären Eckpunkt in  $Q_i$  bezeichnet. Die Triangulierung, die wir durch diese Unterteilung erhalten bezeichnen wir wieder mit  $\tilde{\Delta}$ . Für unseren Hermite-Interpolation wählen wir den Super-Spliner Raum

$$H_d^r(\tilde{\Delta}) := \left\{ f \in S_d^r(\tilde{\Delta}) : f \in C^\rho(v), v \in \Diamond \right\}$$

mit  $\rho = \lfloor \frac{3r}{2} \rfloor$  und  $d = 2\rho + 1$ .

### 4.2.1 Hermite-Interpolation und Approximationsgüte

Zunächst beschreiben wir eine bestimmende Menge für  $H_d^r(\tilde{\Delta})$ . Aus dieser bestimmenden Menge können wir dann direkt einen Hermite-Interpolanten ableiten. Die bestimmende Menge für ein Viereck  $Q_i$  hängt wieder von der Anzahl der gemeinsamen Kanten mit der Teilquadrangulierung  $\diamond_{i-1}$  ab. Für  $\theta_i \leq 1$  können wir wie in Abschnitt 4.1.1 vorgehen. Wir unterteilen das Viereck in zwei Dreiecke  $T_{i,1}$  und  $T_{i,2}$  und behandeln zuerst das Dreieck  $T_{i,1}$ . Somit gilt  $\theta_{i,1} \leq 1$  und  $\theta_{i,2} = 1$  und wir wählen für diese Dreiecke die minimale bestimmende Menge aus Lemma 3.1. Das folgende Lemma beschreibt eine bestimmende Menge für diesen Fall.

**Lemma 4.13.** *Es seien  $Q_i := \diamond(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4})$  ein Viereck mit  $\theta_i \leq 1$ ,  $T_{i,1} := \triangle(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$ ,  $T_{i,2} := \triangle(v_{i,1}, v_{i,3}, v_{i,4})$  die beiden Dreiecke in  $Q_i$  und  $\mathcal{D}_{i-1}$  eine bestimmende Menge von  $H_d^r(\tilde{\Delta}_{i-1})$ . Wir definieren*

$$\tilde{\mathcal{D}}_i := \begin{cases} \left\{ P_\alpha^{i,1} : |\alpha| = d \right\} \cup \left\{ P_\alpha^{i,2} : |\alpha| = d; \alpha_1, \alpha_2 < d - \rho; \alpha_3 > r \right\} & \text{falls } \theta_i = 0 \\ \left\{ P_\alpha^{i,j} : |\alpha| = d; \alpha_1, \alpha_2 < d - \rho; \alpha_3 > r; j = 1, 2 \right\} & \text{falls } \theta_i = 1 \end{cases}$$

Dann ist  $\mathcal{D}_i := \mathcal{D}_{i-1} \cup \tilde{\mathcal{D}}_i$  eine bestimmende Menge von  $H_d^r(\tilde{\Delta}_i)$ .

Somit müssen wir noch die Vierecke mit  $\theta_i \geq 2$  behandeln. Hierzu beschreibt das folgende Lemma eine bestimmende Menge für ein FVS-Element.

**Lemma 4.14.** *Es seien  $Q_i := \diamond(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4})$  ein Viereck,  $v_{i,5}$  der singuläre Eckpunkt in  $Q_i$ , der durch die Unterteilung entsteht und  $T_{i,j} := \triangle(v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i,5})$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  die Dreiecke in  $Q_i$ . Wir definieren*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{i,j} &:= \{ P_\alpha^{i,j} : |\alpha| = d; \alpha_1 \geq d - \rho \} \\ \mathcal{A}_{i,j} &:= \{ P_\alpha^{i,j} : |\alpha| = d; \alpha_1, \alpha_2 < d - \rho; \alpha_3 \leq r \} \\ \mathcal{B}_{i,j} &:= \left\{ P_\alpha^{i,j} : |\alpha| = d; \alpha_1, \alpha_2 > \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor; \alpha_3 > r \right\} \\ \mathcal{C}_{i,j} &:= \left\{ P_\alpha^{i,j} : |\alpha| = d; \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor < \alpha_1 < d - \rho; \alpha_2 = 0 \right\} \end{aligned}$$

sowie

$$\mathcal{D}_i := \begin{cases} \bigcup_{j=1}^4 (\mathcal{V}_{i,j} \cup \mathcal{A}_{i,j} \cup \mathcal{B}_{i,j}) & r \text{ ungerade} \\ \bigcup_{j=1}^4 (\mathcal{V}_{i,j} \cup \mathcal{A}_{i,j} \cup \mathcal{B}_{i,j} \cup \mathcal{C}_{i,j}) \cup \{v_{i,5}\} & r \text{ gerade} \end{cases}$$

Dann ist  $\mathcal{D}_i$  eine bestimmende Menge für  $H_d^r(\{T_{i,1}, \dots, T_{i,4}\})$ .

**Beweis:** Der Fall  $r$  ungerade wurde bereits von Laghchim-Lahlou und Sablonnière [91] bewiesen. Den Fall  $r$  gerade beweist man wie in Lemma 3.4. Durch die Mengen  $\mathcal{V}_{i,j}$  ergeben sich alle Koeffizienten in den Scheiben  $D_\rho(v_{i,j})$ . Für die verbleibenden

Koeffizienten wendet man für alle inneren Kanten induktiv Lemma 3.2 an und bestimmt zunächst alle Koeffizienten auf den Ringen  $R_\nu(v_{i,j})$  mit  $\nu = \rho + 1, \dots, 2r$ . Aus der  $C^r$ -Bedingung an den inneren Kanten ergeben sich nun alle Koeffizienten mit  $\alpha_2 = 0$ . Die verbleibenden Koeffizienten auf den Ringen  $R_\nu(v_{i,j})$  mit  $\nu = 2r + 1, \dots, d$  erhalten wir nun induktiv nach Lemma 3.2.  $\square$

Die Abbildung 4.19 zeigt die bestimmende Menge aus Lemma 4.14. Hierbei sind die Punkte aus  $\mathcal{A}_{i,j}$  und  $\mathcal{B}_{i,j}$  mit  $*$ , die Punkte aus  $\mathcal{C}_{i,j}$  mit  $\star$  und die Punkte aus  $\mathcal{V}_{i,j}$  mit  $\bullet$  gekennzeichnet. Mit Lemma 4.14 erhalten wir nun eine bestimmende Menge für Vierecke mit  $\theta_i \geq 2$ .

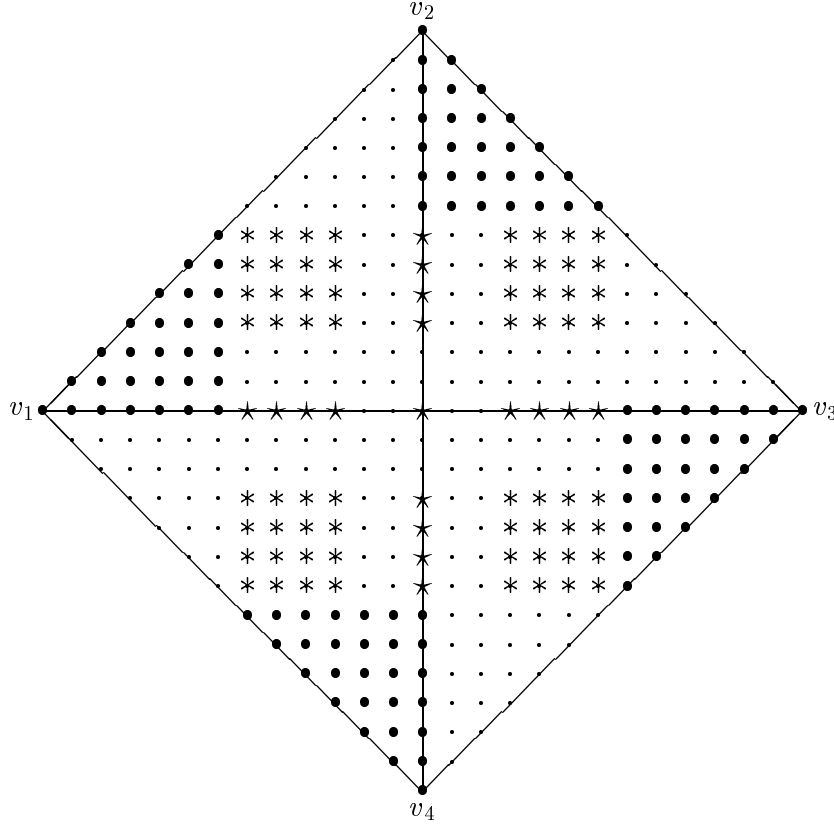


Abbildung 4.19: Bestimmende Menge für  $H_4(\{T_1, \dots, T_4\})$

**Lemma 4.15.** *Es seien  $Q_i := \diamond(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4})$  ein Viereck mit  $\theta_i \geq 2$ ,  $v_{i,5}$  der singuläre Eckpunkt in  $Q_i$ ,  $T_{i,j} := \triangle(v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i,5})$  für  $j = 1, \dots, 4$ ,  $\mathcal{D}_{i-1}$  eine bestimmende Menge von  $H_d^r(\Delta_{i-1})$  und  $\mathcal{V}_{i,j}$ ,  $\mathcal{A}_{i,j}$ ,  $\mathcal{B}_{i,j}$ ,  $\mathcal{C}_{i,j}$  wie in Lemma 4.14 definiert. Wir*

setzen

$$\tilde{\mathcal{D}}_i := \begin{cases} \bigcup_{j=1}^4 \mathcal{B}_{i,j} \cup \mathcal{A}_{i,3} \cup \mathcal{A}_{i,4} \cup \mathcal{V}_{i,4} & \theta_i = 2 \text{ und } r \text{ ungerade} \\ \bigcup_{j=1}^4 \mathcal{B}_{i,j} \cup \mathcal{A}_{i,4} & \theta_i = 3 \text{ und } r \text{ ungerade} \\ \bigcup_{j=1}^4 \mathcal{B}_{i,j} & \theta_i = 4 \text{ und } r \text{ ungerade} \\ \bigcup_{j=1}^4 (\mathcal{B}_{i,j} \cup \mathcal{C}_{i,j}) \cup \mathcal{A}_{i,3} \cup \mathcal{A}_{i,4} \cup \mathcal{V}_{i,4} \cup \{v_{i,5}\} & \theta_i = 2 \text{ und } r \text{ gerade} \\ \bigcup_{j=1}^4 (\mathcal{B}_{i,j} \cup \mathcal{C}_{i,j}) \cup \mathcal{A}_{i,4} \cup \{v_{i,5}\} & \theta_i = 3 \text{ und } r \text{ gerade} \\ \bigcup_{j=1}^4 (\mathcal{B}_{i,j} \cup \mathcal{C}_{i,j}) \cup \{v_{i,5}\} & \theta_i = 4 \text{ und } r \text{ gerade} \end{cases}$$

Dann ist  $\mathcal{D}_i := \mathcal{D}_{i-1} \cup \tilde{\mathcal{D}}_i$  eine bestimmende Menge von  $H_d^r(\tilde{\Delta}_i)$ .

**Beweis:** Mit Lemma 4.14 erfolgt der Beweis analog wie in Lemma 3.4.  $\square$

Damit können wir nun wieder eine minimale bestimmende Menge des Splineraums  $H_d^r(\tilde{\Delta})$  konstruieren. Hierzu definieren wir induktiv die Mengen  $\mathcal{D}_i$ ,  $i = 0, \dots, N$  nach dem folgenden Verfahren.

- (i) Wir setzen  $\mathcal{D}_0 := \emptyset$
- (ii) Sei  $\mathcal{D}_j$ , für  $0 \leq j < i$  konstruiert. Für  $\theta_i \leq 1$  wählen wir die Menge  $\tilde{\mathcal{D}}_i$  nach Lemma 4.13 und für  $\theta_i \geq 2$  die Menge  $\tilde{\mathcal{D}}_i$  nach Lemma 4.15 und setzen

$$\mathcal{D}_i := \mathcal{D}_{i-1} \cup \tilde{\mathcal{D}}_i$$

- (iii) Schließlich definieren wir  $\mathcal{D} := \mathcal{D}_N$

**Satz 4.16.** Sei  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\rho = \lfloor \frac{3r}{2} \rfloor$ ,  $d = 2\rho + 1$  und  $\mathcal{D}$  nach dem oben beschriebenen Verfahren konstruiert. Dann ist  $\mathcal{D}$  eine bestimmende Menge des Splineraums.

$$H_d^r(\tilde{\Delta}) := \left\{ f \in S_d^r(\tilde{\Delta}) : f \in C^\rho(v), v \in \diamond \right\}$$

Aus der minimalen bestimmenden Menge aus Satz 4.16 können wir direkt das folgende Hermite-Interpolationsverfahren ableiten.

**Satz 4.17.** Sei  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\rho = \lfloor \frac{3r}{2} \rfloor$ ,  $d = 2\rho + 1$  und  $f \in C^{2r}(\Omega)$ , dann gibt es einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in H_d^r(\tilde{\Delta})$ , der die folgenden Interpolationsbedingungen erfüllt:

- (i) Für jeden Eckpunkt  $v_i \in \diamond$  und  $\mu + \nu \leq \rho$  gelte:

$$D_x^\mu D_y^\nu s(v_i) = D_x^\mu D_y^\nu f(v_i)$$

- (ii) Für jedes Viereck  $Q_i = \diamond(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4})$  sei  $e_{i,j} := \overline{v_{i,j} v_{i,j+1}}$ ,  $z_{i,j}$  ein Vektor, der nicht parallel zur Kante  $e_{i,j}$  verläuft und  $w_{i,j}^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, r$  paarweise verschiedene Punkte auf  $e_{i,j}$ .

(a) Ist  $\theta_i = 0$ , dann gelte für  $1 \leq \mu \leq \nu \leq r$

$$D_{z_{i,1}}^\nu s(w_{i,1}^\mu) = D_{z_{i,1}}^\nu f(w_{i,1}^\mu)$$

(b) Ist  $\theta_i = 1$ , dann gelte für  $\rho < \mu + \nu < d - r$  und  $\mu, \nu \geq \mu + \nu - \rho$

$$D_{v_{i,1}-v_{i,3}}^\mu D_{v_{i,2}-v_{i,3}}^\nu s(v_{i,3}) = D_{v_{i,1}-v_{i,3}}^\mu D_{v_{i,2}-v_{i,3}}^\nu f(v_{i,3})$$

(c) Ist  $\theta_i \in \{0, 1\}$ , dann gelte für  $\rho < \mu + \nu < d - r$  und  $\mu, \nu \geq \mu + \nu - \rho$

$$D_{v_{i,1}-v_{i,4}}^\mu D_{v_{i,3}-v_{i,4}}^\nu s(v_{i,4}) = D_{v_{i,1}-v_{i,4}}^\mu D_{v_{i,3}-v_{i,4}}^\nu f(v_{i,4})$$

(d) Ist  $\theta_i \in \{2, 3\}$ , dann gelte für  $1 \leq \mu \leq \nu \leq r$  und  $\theta_i < j \leq 4$

$$D_{z_{i,j}}^\nu s(w_{i,j}^\mu) = D_{z_{i,j}}^\nu f(w_{i,j}^\mu)$$

(e) Ist  $\theta_i \in \{2, 3, 4\}$ , dann gelte für  $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $r + 1 \leq \nu \leq 2r - 1$  und  $1 \leq \mu \leq 2r - \nu$

$$D_{z_{i,j}}^\nu s(w_{i,j}^\mu) = D_{z_{i,j}}^\nu f(w_{i,j}^\mu)$$

(iii) Ist  $r$  gerade und  $Q_i = \diamond(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4})$  ein Viereck mit  $\theta_i \geq 2$ , dann gelte für  $j = 1, 2, 3, 4$  und  $\rho + 1 \leq \nu \leq \rho + r$

$$\begin{aligned} D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^\nu s(v_{i,j}) &= D_{v_{i,5}-v_{i,j}}^\nu f(v_{i,j}) \\ s(v_{i,5}) &= f(v_{i,5}) \end{aligned}$$

wobei  $v_{i,5}$  den singulären Eckpunkt in  $Q_i$  bezeichne.

**Beweis:** Nach Satz 2.3 und 2.4 erhalten wir wieder direkt die Koeffizienten der bestimmenden Menge in Satz 4.16 aus den Interpolationsbedingungen (i) - (iii). Bezeichnen wir mit  $M$  die Anzahl der Bedingungen, dann gilt somit  $\dim H_d^r(\tilde{\Delta}) \leq M$ . Wir erhalten nun für ungerade  $r$ :

$$\begin{aligned} M &= \binom{\rho+2}{2} V^\diamond + \binom{\rho+1}{2} \Theta_0 + \left[ \binom{\rho+1}{2} - \binom{r+1}{2} \right] (\Theta_0 + 2\Theta_1) \\ &\quad + \binom{r+1}{2} (2\Theta_2 + \Theta_3) + 4 \binom{r}{2} (\Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4) \\ &= \binom{d+2}{2} - \left[ \binom{d+2}{2} - \binom{\rho+2}{2} \right] (V_I^\diamond + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4) \\ &\quad + \left[ \binom{d-r+1}{2} - 2 \binom{\rho-r+1}{2} \right] (E_I^\diamond + \Theta_0 + \Theta_1 + 4\Theta_2 + 4\Theta_3 + 4\Theta_4) \\ &\quad + \frac{3r^2 + 4r + 1}{8} (\Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4) \end{aligned}$$

Analog folgt für gerade  $r$ :

$$\begin{aligned}
M &= \binom{\rho+2}{2} V^\diamond + \binom{\rho+1}{2} \Theta_0 + \left[ \binom{\rho+1}{2} - \binom{r+1}{2} \right] (\Theta_0 + 2\Theta_1) \\
&\quad + \binom{r+1}{2} (2\Theta_2 + \Theta_3) + \left[ 4\binom{r}{2} + 4r + 1 \right] (\Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4) \\
&= \binom{d+2}{2} - \left[ \binom{d+2}{2} - \binom{\rho+2}{2} \right] (V_I^\diamond + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4) \\
&\quad + \left[ \binom{d-r+1}{2} - 2\binom{\rho-r+1}{2} \right] (E_I^\diamond + \Theta_0 + \Theta_1 + 4\Theta_2 + 4\Theta_3 + 4\Theta_4) \\
&\quad + \frac{3r^2 + 6r}{8} (\Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4)
\end{aligned}$$

Mit Satz 2.10 gilt somit  $M \leq \dim H_d^r(\tilde{\Delta})$ , so dass  $s$  eindeutig bestimmt ist.  $\square$

Wie für den Clough-Tocher Split lassen sich die Koeffizienten eines FVS-Elements lokal berechnen. Mit den gleichen Argumenten wie in Kapitel 3 erhalten wir die folgenden Aussagen über das Approximationsverhalten unseres Interpolanten.

**Satz 4.18.** *Ist  $r$  gerade,  $f \in C^{m+1}(\Omega)$ ,  $2r \leq m \leq d$  und  $s$  der eindeutig bestimmte Interpolant aus Satz 4.17, dann gibt es eine Konstante  $K$ , die nur von  $r$  und dem kleinsten Winkel der Quadrangulierung abhängt, so dass*

$$\|f - s\| \leq Kh^{m+1} \|f\|_{m+1}$$

*gilt. Insbesondere besitzt der Splineraum  $H_d^r(\tilde{\Delta})$  die optimale Approximationsordnung  $d + 1$ .*

Für ungerades  $r$  kann der Interpolant nicht lokal berechnet werden. Das Approximationsverhalten hängt hier wieder von der längsten Kette von Vierecken  $Q_i$  mit  $\theta_i = 1$  ab. Wir erhalten die folgende Aussage.

**Satz 4.19.** *Ist  $r$  ungerade,  $f \in C^{m+1}(\Omega)$ ,  $2r \leq m \leq d$  und  $s$  der eindeutig bestimmte Interpolant aus Satz 4.17. Weiter sei  $Q_{i_1}, \dots, Q_{i_k}$  die längste zusammenhängende Kette von Vierecken mit  $i_j < i_{j+1}$  und  $\theta_{i_j} = 1$ . Dann gibt es eine Konstante  $K$ , die nur von  $r$  und dem kleinsten Winkel der Quadrangulierung abhängt, so dass*

$$\|f - s\| \leq Kkh^{m+1} \|f\|_{m+1}$$

*gilt. Für  $k \in O(h^{-q})$  besitzt der Splineraum  $H_d^r(\tilde{\Delta})$  mindestens die Approximationsordnung  $d + 1 - q$ .*

Wie bei den Algorithmen für Triangulierungen können wir auch bei der Unterteilung von Quadrangulierungen die Länge  $k$  beeinflussen. Der Algorithmus, der in dem folgenden Abschnitt vorgestellt wird, berechnet Unterteilungen mit möglichst wenigen

FVS-Elementen. Hierfür gilt im Allgemeinen  $k \in O(h^{-1})$ , so dass wir eine Approximationsordnung von mindestens  $d$  erhalten. Man kann aber auch hier die Länge  $k$  beschränken, so dass der Interpolant die optimale Approximationsordnung besitzt. Auch in diesem Fall müssen wir maximal die Hälfte der Vierecke nach Fraeijs de Veubeke und Sander unterteilen, so dass unser Verfahren effizienter ist als das Verfahren von Laghchim-Lahlou und Sablonnière [91].

#### 4.2.2 Minimale Unterteilungen

Wie wir bereits zu Beginn des Abschnitts gesagt haben, ist die Unterteilung mit FVS-Elementen im Allgemeinen effizienter als die Unterteilung mit Clough-Tocher Elementen, da wir ein Viereck mit  $\theta_i = 4$  nur in vier Dreiecke unterteilen müssen. Eine optimale Unterteilung erhalten wir deshalb, wenn  $\Theta_2 = \Theta_3 = 0$  und  $\Theta_4 = V_I^\diamond/3$  gilt. Die Abbildung 4.20 zeigt eine solche Unterteilung für eine Quadrangulierung mit  $N = 7$  und  $V_I^\diamond = 3$ . Die Unterteilung mit FVS-Elementen enthält 16 Dreiecke, während wir 18 Dreiecke für eine Unterteilung mit Clough-Tocher Elementen benötigen. Die vollständige Unterteilung nach Laghchim-Lahlou und Sablonnière [90, 91] benötigt sogar 28 (FVS) bzw. 42 (Clough-Tocher) Dreiecke.

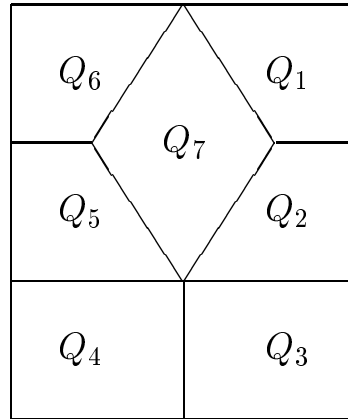


Abbildung 4.20: Unterteilung einer konvexen Quadrangulierung

Im Gegensatz zu Triangulierungen ist es schwierig eine optimale Nummerierung für eine Quadrangulierung zu charakterisieren. Dies ist auch darin begründet, dass es nicht immer eine optimale Nummerierung mit  $\Theta_0 = 1$  geben muss. Mit der Abbildung 4.18 am Anfang des Abschnitts haben wir hierfür bereits ein Gegenbeispiel gezeigt. Insofern ist auch die Bestimmung einer optimalen Nummerierung schwierig. Wir wählen deshalb wie in Kapitel 3 einen heuristischen Ansatz und modifizieren hierzu den Algorithmus 3.23.

**Algorithmus 4.20.***Eingabe:* Liste  $\diamond$  von Vierecken*Ausgabe:* Liste  $\pi$  von IntegerInitialisiere drei leere Warteschlangen  $W$ ,  $W_2$  und  $W_3$ markiere Viereck  $Q_1$  und füge 1 in  $W$  ein $n := 1$ **Solange**  $W$  **oder**  $W_2$  **oder**  $W_3$  nicht leer ist    **Falls**  $W$  nicht leer ist        hole nächsten Wert  $m$  von  $W$         **Falls**  $Q_m$  zwei markierte Nachbarn hat            füge  $m$  in  $W_2$  ein und gehe zum Anfang der Schleife        **Sonst falls**  $Q_m$  drei markierte Nachbarn hat            füge  $m$  in  $W_3$  ein und gehe zum Anfang der Schleife    **Sonst falls**  $W_3$  nicht leer ist        hole nächsten Wert  $m$  von  $W_3$     **Sonst**        hole nächsten Wert  $m$  von  $W_2$      $\pi(m) := n$ ,  $n := n + 1$     **Für alle** unmarkierten Nachbarn  $Q_i$  von  $Q_m$         markiere Viereck  $Q_i$         füge  $i$  in  $W$  ein

Der Algorithmus ist wieder linear in der Anzahl der Vierecke und liefert eine Nummerierung der Vierecke mit  $\Theta_0 = 1$ .

$F_{19}$	$Q_{17}$	$Q_{18}$	$F_{46}$	$Q_{11}$	$Q_{12}$	$F_{43}$
$Q_{15}$	$Q_{16}$	$F_{45}$	$Q_9$	$Q_{10}$	$F_{42}$	$Q_{30}$
$Q_{14}$	$F_{44}$	$Q_7$	$Q_8$	$F_{41}$	$Q_{28}$	$Q_{29}$
$F_{13}$	$Q_5$	$Q_6$	$F_{40}$	$Q_{26}$	$Q_{27}$	$F_{49}$
$Q_3$	$Q_4$	$F_{39}$	$Q_{24}$	$Q_{25}$	$F_{48}$	$Q_{36}$
$Q_2$	$F_{38}$	$Q_{22}$	$Q_{23}$	$F_{47}$	$Q_{34}$	$Q_{35}$
$Q_1$	$Q_{20}$	$Q_{21}$	$F_{31}$	$Q_{32}$	$Q_{33}$	$F_{37}$

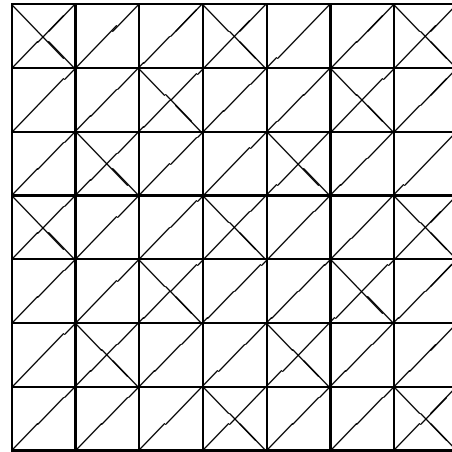


Abbildung 4.21: Minimale Unterteilung für eine Rechteckspartition



Zum Abschluß geben wir ein Beispiel für eine optimale Unterteilung einer Rechteckspartition. Diese Unterteilung erhalten wir, wenn die FVS-Elemente diagonal gesetzt werden (siehe Abbildung 4.21). Bei dieser Nummerierung gibt es im Innern der Partition nur Vierecke  $Q_i$  mit  $\theta_i \in \{1, 4\}$ . Lediglich am Rand der Partition gibt es FVS-Elemente mit  $\theta_i \in \{2, 3\}$ . Die dargestellte Nummerierung für eine Partition mit 7 Zeilen und Spalten besitzt 16 FVS-Elemente (mit  $F_i$  bezeichnet). Eine optimale Nummerierung mit Clough-Tochter Elementen enthält dagegen 18 Elemente.

## Kapitel 5

# Lagrange-Interpolation

In den vergangenen Jahren wurden verschiedene Hermite-Interpolationsverfahren mit bivariaten Splinefunktionen auf Triangulierungen entwickelt. Chui [31] bemerkte jedoch, dass der Bereich der Lagrange-Interpolation noch wenig erforscht ist. Erst in den letzten zehn Jahren wurden Lagrange-Interpolationsmengen für bivariate Splinefunktionen konstruiert. Für  $\Delta^1$ - und  $\Delta^2$ -Partitionen haben Chui und He [32], Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [48, 50], Laghchim-Lahlou und Sablonnière [93], Nürnberger [110], Nürnberger und Riessinger [111, 112] Nürnberger und Walz [113] und Nürnberger und Zeilfelder [114, 116] Interpolationsverfahren entwickelt. Interpolationsmengen für Crosscut-Partitionen finden sich bei Adam [1]. Die Lagrange-Interpolation für allgemeine Klassen von Triangulierungen behandeln Davydov, Nürnberger und Zeilfelder [49, 52] und Nürnberger und Zeilfelder [115, 117]. Für beliebige Triangulierungen haben Davydov und Nürnberger [46] Lagrange-Interpolationsmengen für die Splineräume  $S_d^1(\Delta)$  mit  $d \geq 5$  entwickelt. Es gibt bisher jedoch noch kein Lagrange-Interpolationsverfahren mit quadratischen oder kubischen  $C^1$ -Splines auf beliebigen Triangulierungen.

Den Grund, dass Hermite-Interpolationsverfahren leichter als Lagrange-Interpolationsverfahren zu konstruieren sind, haben wir in Kapitel 2 dargelegt. Hier wurde gezeigt, dass zwischen den Bernstein-Bézier-Koeffizienten und den Ableitungen eines Polynoms ein direkter Zusammenhang besteht. Dieser ermöglicht es, die Koeffizienten aus den Ableitungen einer gegebenen Funktion zu berechnen. Es ist deshalb oft möglich, aus einer bestimmenden Menge des Splineranges direkt ein Hermite-Interpolationsschema abzuleiten. Für die Lagrange-Interpolation ist dies im Allgemeinen nicht möglich. Die Konstruktion von Lagrange-Interpolationsmengen ist deshalb sehr schwierig.

Wir beschreiben in diesem Kapitel ein Verfahren, mit dem wir Interpolationsmengen für die Lagrange-Interpolation auf beliebigen Triangulierungen konstruieren können. Wir behandeln hier sowohl unsere Unterteilungsmethoden aus den Kapiteln 3 und 4, als auch die klassischen Unterteilungen mit Clough-Tocher und Powell-Sabin Elementen und entwickeln Lagrange-Interpolationsmengen für die Splineräume  $S_2^1(\Delta)$  und  $S_3^1(\Delta)$ . Dies sind die ersten Lagrange-Interpolationsverfahren mit quadratischen und

kubischen  $C^1$ -Splines auf beliebigen Triangulierungen. Zunächst betrachten wir die Super-Splineräume  $S_3^{0,1}(\Delta)$  und  $S_5^{1,2}(\Delta)$  (siehe Strang und Fix [137]). Für diese Splineräume beschreiben wir eine Interpolationsmethode ohne Unterteilung der Dreiecke. Der zweite Abschnitt enthält verschiedene Unterteilungsverfahren. Zunächst wird die klassische Unterteilung aller Dreiecke nach Clough-Tocher [45] zur Interpolation mit kubischen  $C^1$ -Splines behandelt. Anschließend beschreiben wir ein Interpolationsverfahren für unsere Unterteilungsmethode aus Kapitel 3. Weiterhin werden zwei Verfahren mit quadratischen  $C^1$ -Splines vorgestellt. Bei der ersten Methode verwenden wir eine Unterteilung nach Powell-Sabin [121]. Das zweite Verfahren arbeitet wieder iterativ. Hier müssen nicht alle Dreiecke unterteilt werden. Dadurch erhalten wir einen Interpolanten, der nur die Funktionswerte in den Eckpunkten, sowie drei Lagrange-Punkte im ersten Dreieck benötigt. Er ist deshalb gut zur direkten Interpolation verstreuter Daten geeignet. Der letzte Abschnitt enthält schließlich Interpolationsverfahren auf konvexen Quadrangulierungen. Hier untersuchen wir Unterteilungen mit Elementen nach Fraeijs de Veubeke und Sander [67]. Für zwei unterschiedliche Unterteilungsverfahren entwickeln wir Interpolationsmethoden mit kubischen  $C^1$ -Splines.

Für die Konstruktion der Interpolationsmengen verwenden wir wie in Kapitel 3 und 4 ein iteratives Verfahren. Die Interpolationsmengen sind deshalb nicht für alle Dreiecke gleich. Hier unterscheiden sich die Lagrange-Interpolationsverfahren von den Methoden mit finiten Elementen. Die Wahl der Interpolationspunkte auf einem Dreieck  $T_i$  hängt wieder von der Anzahl der gemeinsamen Kanten mit der Teiltriangulierung  $\Delta_{i-1} := \{T_1, \dots, T_{i-1}\}$  ab. Für einige Verfahren benötigen wir hierzu eine Nummerierung der Dreiecke, bei der jedes Dreieck  $T_i$  höchstens zwei gemeinsame Kanten mit der Teiltriangulierung  $\Delta_{i-1}$  hat. Das folgende Lemma zeigt, dass wir für jede Triangulierung eine solche Reihenfolge bestimmen können. Hierbei verwenden wir die gleichen Bezeichnungen wie in Kapitel 3.

**Lemma 5.1.** *Sei  $\Delta := \{T_1, \dots, T_N\}$  eine Triangulierung eines zusammenhängenden Gebiets  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , dann gibt es eine Nummerierung  $\pi$  der Dreiecke von  $\Delta$  mit  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_3^\pi = 0$ .*

**Beweis:** Da  $\Omega$  zusammenhängend ist, gibt es ein Dreieck  $T_i \in \Delta$  am Rand von  $\Omega$ , so dass  $\Delta \setminus \{T_i\}$  ebenfalls zusammenhängend ist. Wir setzen  $\Delta_{N-1} := \Delta \setminus \{T_i\}$ ,  $\pi(i) := N$  und wiederholen den Schritt bis zur Teiltriangulierung  $\Delta_1$ . Da  $\Delta_i$  in jedem Schritt zusammenhängend ist, gilt  $\theta_{i+1}^\pi \geq 1$ ,  $i = 1, \dots, N-1$  und somit  $\Theta_0^\pi = 1$ . Andererseits muss  $\theta_i^\pi \leq 2$ ,  $i = 1, \dots, N$  gelten, da jedes Dreieck am Rand der Triangulierung entfernt wird.  $\square$

Mit dem gleichen Beweis erhalten wir die folgende Aussage für Quadrangulierungen.

**Lemma 5.2.** *Sei  $\diamond := \{Q_1, \dots, Q_N\}$  eine Quadrangulierung eines zusammenhängenden Gebiets  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , dann gibt es eine Nummerierung  $\pi$  der Vierecke von  $\diamond$  mit  $\Theta_0^\pi = 1$  und  $\Theta_4^\pi = 0$ .*

## 5.1 Interpolation mit Super-Splines

In diesem Abschnitt beschreiben wir Interpolationsmengen für die Super-Splineräume  $S_3^{0,1}(\Delta)$  und  $S_5^{1,2}(\Delta)$ . Für die Beschreibung der Interpolationsmengen verwenden wir die Nummerierung aus Lemma 5.1. Weiter wollen wir annehmen, dass die Eckpunkte  $v_{i,j}$  eines Dreiecks  $T_i$  wie in Kapitel 3 nummeriert sind. Zunächst betrachten wir den Fall  $S_3^{0,1}(\Delta)$  und beschreiben die Interpolationsmengen auf einem Dreieck.

Für das erste Dreieck  $T_1$  wählen wir sechs Punkte  $w_{1,1}, \dots, w_{1,6}$ , so dass  $v_{1,j}$ ,  $w_{1,2j-1}$ ,  $w_{1,2j}$  und  $v_{1,j+1}$  paarweise verschiedene Punkte auf der Kante  $\overline{v_{1,j}v_{1,j+1}}$  sind. Weiter wählen wir einen beliebigen Punkt  $w_{1,7}$  im Innern von  $T_1$  und setzen

$$\mathcal{A}_1 := \{v_{1,1}, \dots, v_{1,3}, w_{1,1}, \dots, w_{1,7}\}$$

Für ein Dreieck  $T_i$  mit  $\theta_i = 1$  wählen wir zwei Punkte  $w_{i,1}$  und  $w_{i,2}$  auf den Kanten  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$  bzw.  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$ , sowie einen Punkt  $w_{i,3}$  im Innern von  $T_i$ . Hierfür definieren wir

$$\mathcal{A}_i := \{v_{i,3}, w_{i,1}, \dots, w_{i,3}\}$$

Gilt schließlich  $\theta_i = 2$ , dann wählen wir einen Punkt  $w_{i,1}$  im Innern von  $T_i$  und setzen  $\mathcal{A}_i := \{w_{i,1}\}$ . Die Abbildung 5.1 zeigt die Interpolationsmengen für diese drei Fälle.

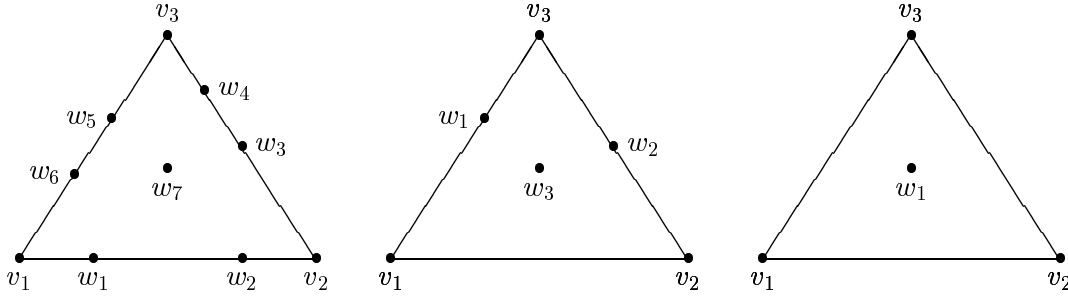


Abbildung 5.1: Interpolationsmengen  $\mathcal{A}_i$  für  $S_3^{0,1}(\Delta)$

**Satz 5.3.** *Es seien  $\mathcal{A}_i$  wie oben definiert und  $\mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^N \mathcal{A}_i$ , dann gibt es zu jeder Funktion  $f \in C(\Omega)$  einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in S_3^{0,1}(\Delta)$  mit  $s(v) = f(v)$ ,  $v \in \mathcal{A}$ .*

**Beweis:** Für die Nummerierung aus Lemma 5.1 gilt  $\Theta_2 = V_I$  nach Gleichung (3.5). Somit erhalten wir:

$$|\mathcal{A}| = 10\Theta_0 + 4\Theta_1 + \Theta_2 = 10 + 4(N - V_I - 1) + V_I = 3V + N = \dim S_3^{0,1}(\Delta)$$

Wir zeigen nun, dass wir alle Bernstein-Bézier-Koeffizienten aus den Interpolationswerten berechnen können.

Für  $T_1$  enthält  $\mathcal{A}$  vier Interpolationspunkte auf jeder Kante von  $T_1$ . Diese bestimmen eindeutig das univariate Polynom entlang dieser Kante und somit die Bernstein-Bézier-Koeffizienten. Der verbleibende Koeffizient  $c_{111}^1$  wird durch den Wert im Punkt  $w_{1,7}$  berechnet. Seien  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  die baryzentrischen Koordinaten von  $w_{1,7}$  bezüglich  $T_1$ , dann gilt nach Voraussetzung  $\lambda_j > 0$ ,  $j = 1, 2, 3$  und wir erhalten:

$$c_{111}^1 = \frac{f(w_{1,7}) - \sum_{\alpha \neq (1,1,1)} c_{\alpha}^1 B_{\alpha}^3(\lambda)}{6\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$$

Für  $\theta_i = 1$  lassen sich die Koeffizienten  $c_{\alpha}^i$  mit  $\alpha_1 \geq 2$  bzw.  $\alpha_2 \geq 2$  direkt aus der  $C^1$ -Bedingung in den Eckpunkten  $v_{i,1}$  und  $v_{i,2}$  berechnen. Weiter ergibt sich

$$c_{003}^i = s(v_{i,3}) = f(v_{i,3})$$

nach Satz 2.3 aus dem Interpolationswert in  $v_{i,3}$ . Nun enthält  $\mathcal{A}$  einen Punkt  $w_{i,1}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$ . Sei  $w_{i,1} = \lambda v_{i,1} + (1 - \lambda)v_{i,3}$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ , dann folgt:

$$c_{102}^i = \frac{f(w_{i,1}) - \lambda^3 c_{300}^i - 3\lambda^2(1 - \lambda)c_{201}^i - (1 - \lambda)^3 c_{003}^i}{3\lambda(1 - \lambda)^2}$$

Analog berechnet sich  $c_{012}^i$  aus dem Interpolationswert in dem Punkt  $w_{i,2}$ . Den Koeffizienten  $c_{111}^i$  erhält man schließlich wie im Fall  $\theta_i = 0$  aus dem Funktionswert in  $w_{i,3}$ .

Gilt nun  $\theta_i = 2$ , dann ergeben sich alle Koeffizienten  $c_{\alpha}^i$  mit  $\alpha \neq (1, 1, 1)$  direkt aus den  $C^1$ -Bedingungen in den Eckpunkten von  $T_i$ . Den verbleibenden Koeffizienten  $c_{111}^i$  erhält man wie im Fall  $\theta_i = 0, 1$  aus dem Funktionswert im Punkt  $w_{i,1}$ .  $\square$

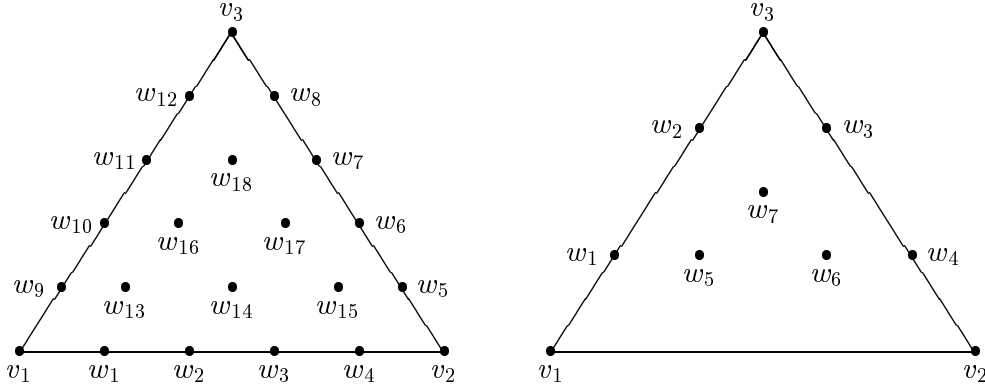
Der zweite Teil dieses Abschnitts behandelt die Interpolation mit  $C^1$ -Splines vom Grad 5. Wir wählen auch hier wieder die Nummerierung nach Lemma 5.1 und definieren hierfür die zugehörigen Interpolationsmengen  $\mathcal{A}_i$ .

Für  $T_1$  wählen wir 12 Punkte  $w_{1,1}, \dots, w_{1,12}$ , so dass  $v_{1,j}, w_{1,4j-3}, \dots, w_{1,4j}$  und  $v_{1,j+1}$  paarweise verschiedene Punkte auf der Kante  $\overline{v_{1,j}v_{1,j+1}}$  sind. Weiter wählen wir sechs Punkte  $w_{1,13}, \dots, w_{1,18}$  im Innern von  $T_1$ , so dass diese sechs Punkte eine Interpolationsmenge bezüglich  $\tilde{\Pi}_2$  sind. Wir definieren nun für  $T_1$  die Interpolationsmenge

$$\mathcal{A}_1 := \{v_{1,1}, \dots, v_{1,3}, w_{1,1}, \dots, w_{1,18}\}$$

Ist  $T_i$  ein Dreieck mit  $\theta_i = 1$ , dann wählen wir zwei Punkte  $w_{i,1}$  und  $w_{i,2}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$ , so dass  $v_{i,1}, w_{i,1}, w_{i,2}$  und  $v_{i,3}$  paarweise verschieden sind. Entsprechend werden zwei Punkte  $w_{i,3}$  und  $w_{i,4}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$  gewählt. Weiter wählen wir drei Punkte  $w_{i,5}, w_{i,6}$  und  $w_{i,7}$  im Innern von  $T_i$ , die nicht alle auf einer Geraden liegen. Für das Dreieck  $T_i$  definieren wir die Interpolationsmenge

$$\mathcal{A}_i := \{v_{i,3}, w_{i,1}, \dots, w_{i,7}\}$$

Abbildung 5.2: Interpolationsmengen  $\mathcal{A}_i$  für  $S_5^{1,2}(\Delta)$ 

Gilt nun schließlich  $\theta_i = 2$ , dann wählen wir einen Punkt  $w_{i,1}$  im Innern von  $T_i$  und setzen  $\mathcal{A}_i := \{w_{i,1}\}$ . In der Abbildung 5.2 haben wir die Interpolationsmengen für die ersten beiden Fälle dargestellt.

**Satz 5.4.** *Es seien  $\mathcal{A}_i$  wie oben definiert und  $\mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^N \mathcal{A}_i$ , dann gibt es zu jeder Funktion  $f \in C(\Omega)$  einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in S_5^{1,2}(\Delta)$  mit  $s(v) = f(v)$ ,  $v \in \mathcal{A}$ .*

**Beweis:** Analog wie im Beweis von Satz 5.3 erhalten wir:

$$|\mathcal{A}| = 21\Theta_0 + 8\Theta_1 + \Theta_2 = 21 + 8(N - V_I - 1) + V_I = 6V + E = \dim S_5^{1,2}(\Delta)$$

Für das Dreieck  $T_1$  lassen sich durch die sechs Interpolationswerte auf jeder Kante alle Bernstein-Bézier-Koeffizienten auf den Kanten von  $T_1$  berechnen. Seien nun  $(\lambda_{j,1}, \lambda_{j,2}, \lambda_{j,3})$  die baryzentrischen Koordinaten von  $w_{i,j}$ ,  $j = 13, \dots, 18$ , dann erhalten wir für die verbleibenden sechs Bernstein-Bézier-Koeffizienten das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \gamma_j = & 20\lambda_{j,1}\lambda_{j,2}\lambda_{j,3} (\lambda_{j,1}^2 c_{311}^1 + \lambda_{j,2}^2 c_{131}^1 + \lambda_{j,3}^2 c_{113}^1) \\ & + 30\lambda_{j,1}\lambda_{j,2}\lambda_{j,3} (\lambda_{j,1}\lambda_{j,2} c_{221}^1 + \lambda_{j,1}\lambda_{j,3} c_{212}^1 + \lambda_{j,2}\lambda_{j,3} c_{122}^1) \end{aligned}$$

mit geeigneten Zahlen  $\gamma_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 13, \dots, 18$ . Da die Punkte  $w_{i,j}$ ,  $j = 13, \dots, 18$  im Innern von  $T_i$  liegen, gilt  $\lambda_{j,1}, \lambda_{j,2}, \lambda_{j,3} > 0$  und somit ist das obige Gleichungssystem äquivalent zu:

$$\tilde{\gamma}_j = \lambda_{j,1}^2 \tilde{c}_{200} + \lambda_{j,2}^2 \tilde{c}_{020} + \lambda_{j,3}^2 \tilde{c}_{002} + 2\lambda_{j,1}\lambda_{j,2} \tilde{c}_{110} + 2\lambda_{j,1}\lambda_{j,3} \tilde{c}_{101} + 2\lambda_{j,2}\lambda_{j,3} \tilde{c}_{011}$$

mit

$$\tilde{\gamma}_j := \frac{\gamma_j}{20\lambda_{j,1}\lambda_{j,2}\lambda_{j,3}}$$

und  $\tilde{c}_{200} := c_{311}^1$ ,  $\tilde{c}_{020} := c_{131}^1$ ,  $\tilde{c}_{002} := c_{113}^1$ ,  $\tilde{c}_{110} := \frac{3}{4}c_{221}^1$ ,  $\tilde{c}_{101} := \frac{3}{4}c_{212}^1$ ,  $\tilde{c}_{011} := \frac{3}{4}c_{122}^1$ . Nach Voraussetzung sind die Punkte  $w_{1,13}, \dots, w_{1,18}$  eine Interpolationsmenge bezüglich  $\tilde{\Pi}_2$ , so dass das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt.

Für ein Dreieck  $T_i$  mit  $\theta_i = 1$  ergeben sich zunächst die Bernstein-Bézier-Koeffizienten  $c_\alpha$  mit  $\alpha_1 \geq 3$  oder  $\alpha_2 \geq 3$  aus den  $C^2$ -Bedingungen in den Eckpunkten  $v_{i,1}$  und  $v_{i,2}$ . Der Koeffizient  $c_{221}^i$  berechnet sich aus der  $C^1$ -Bedingung über die Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$ . Den Koeffizienten  $c_{005}^i$  erhalten wir wieder direkt aus dem Funktionswert im Eckpunkt  $v_{i,3}$ . Für die beiden verbleibenden Koeffizienten  $c_{104}^i$  und  $c_{203}^i$  auf der Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$  können wir aus den Interpolationsbedingungen in den Punkten  $w_{i,1}$  und  $w_{i,2}$  das folgende Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \lambda_1(1 - \lambda_1)^3 \left( (1 - \lambda_1)c_{104}^i + \lambda_1 c_{203}^i \right) \\ \gamma_2 &= \lambda_2(1 - \lambda_2)^3 \left( (1 - \lambda_2)c_{104}^i + \lambda_2 c_{203}^i \right)\end{aligned}$$

mit

$$w_{i,j} = \lambda_j v_{i,1} + (1 - \lambda_j) v_{i,3}, \quad j = 1, 2$$

und geeigneten Werten  $\gamma_j \in \mathbb{R}$ . Da  $w_{i,1}$  und  $w_{i,2}$  zwei verschiedene Punkte im Inneren der Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$  sind, gilt  $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$  und  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , so dass

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & \lambda_1 \\ 1 - \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$$

folgt. Somit sind  $c_{104}^i$  und  $c_{203}^i$  durch die Funktionswerte in den Punkten  $w_{i,1}$  und  $w_{i,2}$  eindeutig bestimmt. Analog folgt dies für die beiden Koeffizienten  $c_{014}^i$  und  $c_{023}^i$  auf der Kante  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$ . Für die verbleibenden drei Koeffizienten  $c_{113}^i$ ,  $c_{212}^i$  und  $c_{122}^i$  kann man aus den Bedingungen in den Punkten  $w_{i,5}$ ,  $w_{i,6}$  und  $w_{i,7}$  wieder ein äquivalentes Interpolationsproblem in  $\tilde{\Pi}_1$  ableiten. Aufgrund der Lage der drei Interpolationspunkte besitzt dieses eine eindeutige Lösung.

Gilt nun schließlich  $\theta_i = 2$ , dann sind alle Koeffizienten bis auf  $c_{122}^i$  durch die  $C^2$ -Bedingungen in den Eckpunkten und die  $C^1$ -Bedingungen an den beiden Kanten  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  und  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$  bestimmt. Den Koeffizienten  $c_{122}^i$  erhalten wir aus dem Funktionswert in  $w_{i,1}$ . Seien  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  die baryzentrischen Koordinaten von  $w_{i,1}$ , dann gilt  $\lambda_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , so dass wir

$$c_{122}^i = \frac{f(w_{i,1}) - \sum_{\alpha \neq (1,2,2)} c_\alpha^i B_\alpha^5(\lambda)}{30\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^2}$$

erhalten. □

## 5.2 Unterteilungsverfahren

### 5.2.1 Interpolation mit kubischen Splines

Interpolationsverfahren mit Clough-Tocher Elementen haben wir bereits in Kapitel 3 besprochen. Hier haben wir die Hermite-Interpolation für unsere Unterteilung  $\tilde{\Delta}$  behandelt und ein Interpolationsschema für die Splineräume  $S_d^{r,\rho}(\tilde{\Delta})$  mit  $\rho := \lfloor \frac{3r+1}{2} \rfloor$  und  $d := 2\rho + 1$  beschrieben. In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall  $r = 1$  und konstruieren Lagrange-Interpolationsmengen für Unterteilungsmethoden mit Clough-Tocher Elementen. Zunächst betrachten wir die Triangulierung  $\Delta_{CT}$ , die wir durch Unterteilen aller Dreiecke von  $\Delta$  erhalten. Anschließend verwenden wir unsere Unterteilungsmethode aus Kapitel 3.

Für die Unterteilung  $\Delta_{CT}$  wählen wir eine Nummerierung der Dreiecke nach Lemma 5.1. Die Eckpunkte  $v_{i,1}$ ,  $v_{i,2}$  und  $v_{i,3}$  und die Mikro-Dreiecke  $T_{i,1}$ ,  $T_{i,2}$  und  $T_{i,3}$  von  $T_i$  seien wie in Kapitel 3 definiert.

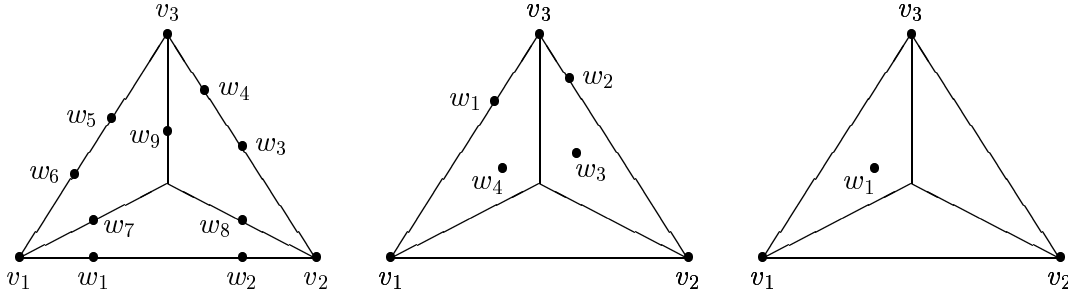


Abbildung 5.3: Interpolationsmengen  $\mathcal{A}_i$  für  $S_3^1(\Delta_{CT})$

Für das erste Dreieck  $T_1$  wählen wir nun sechs Punkte  $w_{1,1}, \dots, w_{1,6}$ , so dass  $v_{1,j}$ ,  $w_{1,2j-1}$ ,  $w_{1,2j}$  und  $v_{1,j+1}$  paarweise verschiedene Punkte auf der Kante  $\overline{v_{1,j}v_{1,j+1}}$  sind. Weiter wählen wir drei paarweise verschiedene Punkte  $w_{1,7}$ ,  $w_{1,8}$  und  $w_{1,9}$  im Innern von  $T_1$ , so dass  $w_{i,j+6}$  auf der Kante  $\overline{v_{1,j}v_{1,4}}$  liegt und setzen

$$\mathcal{A}_1 := \{v_{1,1}, \dots, v_{1,3}, w_{1,1}, \dots, w_{1,9}\}$$

Für ein Dreieck  $T_i$  mit  $\theta_i = 1$  wählen wir einen Punkt  $w_{i,1}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$ , einen Punkt  $w_{i,2}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$ , sowie zwei Punkte  $w_{i,3} \in T_{i,2} \setminus \overline{v_{i,2}v_{i,3}}$  und  $w_{i,4} \in T_{i,3} \setminus \overline{v_{i,3}v_{i,1}}$ , die nicht beide auf der Kante  $\overline{v_{i,3}v_{i,4}}$  liegen dürfen. Hierfür definieren wir

$$\mathcal{A}_i := \{v_{i,3}, w_{i,1}, \dots, w_{i,4}\}$$

Gilt schließlich  $\theta_i = 2$ , so wählen wir einen Punkt  $w_{i,1} \in T_{i,3} \setminus \overline{v_{i,3}v_{i,1}}$  und definieren  $\mathcal{A}_i := \{w_{i,1}\}$ . Die Interpolationsmengen für die drei Fälle zeigt die Abbildung 5.3.



**Satz 5.5.** *Es seien  $\mathcal{A}_i$  wie oben definiert und  $\mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^N \mathcal{A}_i$ , dann gibt es zu jeder Funktion  $f \in C(\Omega)$  einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in S_3^1(\Delta_{CT})$  mit  $s(v) = f(v)$ ,  $v \in \mathcal{A}$ .*

**Beweis:** Wir erhalten analog wie im Beweis von Satz 5.3:

$$|\mathcal{A}| = 12\Theta_0 + 5\Theta_1 + \Theta_2 = 12 + 5(N - V_I - 1) + V_I = 3V + E = \dim S_3^1(\Delta_{CT})$$

Für das Dreieck  $T_1$  erhalten wir aus den Funktionswerten in den Interpolationspunkten auf den Kanten alle Bernstein-Bézier-Koeffizienten auf den äußeren Kanten von  $T_1$ . Aus den  $C^1$ -Bedingungen in den Eckpunkten  $v_{i,j}$ ,  $j = 1, 2, 3$  ergeben sich hieraus alle, bis auf die in Abbildung 5.4 mit  $a_1, \dots, a_7$  bezeichneten Koeffizienten. Seien nun  $w_{1,j+6} = \lambda_j v_{1,j} + (1 - \lambda_j) v_{1,4}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , dann gilt  $\lambda_j \in [0, 1)$  und aus den Interpolationsbedingungen und der  $C^1$ -Bedingung im Eckpunkt  $v_{1,4}$  ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 1 - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 1 - \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 - \lambda_3 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_5 \\ a_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_3 \\ \gamma_5 \\ \gamma_7 \end{pmatrix}$$

mit geeigneten Werten  $\gamma_j \in \mathbb{R}$ . Für die Determinante der Koeffizientenmatrix erhalten wir  $\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3$ . Da alle drei Punkte paarweise verschieden sind, kann höchstens ein Wert  $\lambda_j$  gleich Null sein, so dass  $\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 > 0$  folgt. Also sind die Koeffizienten  $a_1, a_3, a_5$  und  $a_7$  eindeutig bestimmt. Die verbleibenden Koeffizienten  $a_2, a_4$  und  $a_6$  berechnen sich nun direkt aus den  $C^1$ -Bedingungen über die Kanten  $\overline{v_{1,j}v_{1,4}}$ .

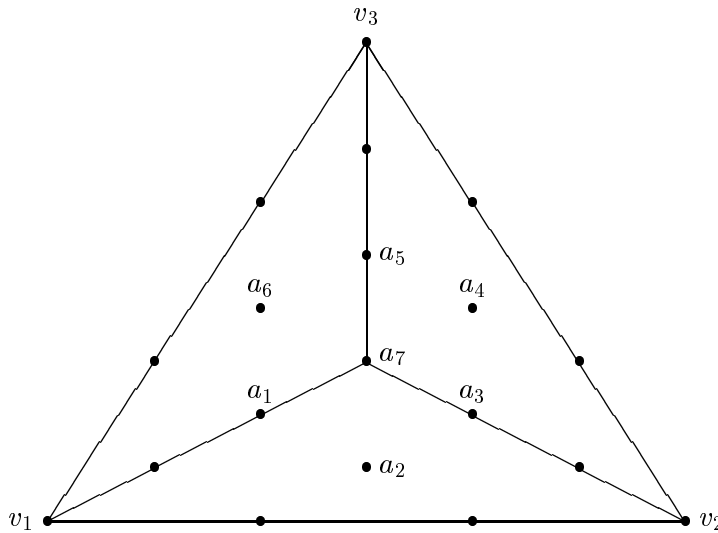


Abbildung 5.4: Bernstein-Bézier-Koeffizienten für Clough-Tocher Element

Als nächstes betrachten wir ein Dreieck  $T_i$  mit  $\theta_i = 1$ . Aus den Interpolationsbedingungen auf den äußeren Kanten von  $T_i$  und den  $C^1$ -Bedingungen in den Eckpunkten erhalten wir wieder alle Koeffizienten bis auf  $a_1, \dots, a_7$ . Der Koeffizient  $a_2$  ergibt sich direkt aus der  $C^1$ -Bedingung über die Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$ . Für die verbleibenden Koeffizienten erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 3\lambda_1\lambda_3 & 6\lambda_1\lambda_2 & 3\lambda_2\lambda_3 & 0 & \lambda_3^2 \\ 3\mu_2\mu_3 & 0 & 0 & 3\mu_1\mu_3 & 6\mu_1\mu_2 & \mu_3^2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \\ \gamma_7 \end{pmatrix}$$

Hierbei sind  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  die baryzentrischen Koordinaten von  $w_{i,3}$  bezüglich  $T_{i,2}$  und  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  die baryzentrischen Koordinaten von  $w_{i,4}$  bezüglich  $T_{i,3}$ . Die Determinante der Koeffizientenmatrix hat den Wert

$$\begin{aligned} & -9((6\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3)(54\lambda_1\lambda_2 + 9\lambda_1\lambda_3 + 9\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_3^2) \\ & + \lambda_1\mu_3(54\mu_1\lambda_2 + 9\mu_1\lambda_3 + 6\mu_3\lambda_2 + \mu_3\lambda_3)) \end{aligned}$$

Da die beiden Interpolationspunkte innerhalb des Dreiecks  $T_i$  liegen, muss  $\lambda_3, \mu_3 > 0$  und  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \geq 0$  gelten. Weiterhin liegen nach Voraussetzung nicht beide Punkte auf der Kante  $\overline{v_{i,3}v_{i,4}}$ , so dass entweder  $\lambda_1 > 0$  oder  $\mu_2 > 0$  folgt. Im ersten Fall gilt

$$\lambda_1\mu_3(54\mu_1\lambda_2 + 9\mu_1\lambda_3 + 6\mu_3\lambda_2 + \mu_3\lambda_3) > 0$$

und im zweiten Fall

$$(6\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3)(54\lambda_1\lambda_2 + 9\lambda_1\lambda_3 + 9\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_3^2) > 0$$

so dass der Ausdruck in der Klammer in jedem Fall größer als Null ist.

Gilt nun  $\theta_i = 2$ , dann erhalten wir alle Koeffizienten bis auf  $a_1, a_5, a_6$  und  $a_7$  direkt aus den  $C^1$ -Bedingungen über die Kanten  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  und  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$ . Seien  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  die baryzentrischen Koordinaten von  $w_{i,1}$  bezüglich  $T_{i,3}$ , dann folgt aus der Interpolationsbedingung in  $w_{i,1}$  und den  $C^1$ -Bedingungen an den inneren Kanten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3\lambda_2\lambda_3 & 3\lambda_1\lambda_3 & 6\lambda_1\lambda_2 & \lambda_3^2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \\ \gamma_7 \end{pmatrix}$$

mit geeigneten Werten  $\gamma_j \in \mathbb{R}$ . Die Determinante hat den Wert

$$162\lambda_1\lambda_2 + 27\lambda_1\lambda_3 + 27\lambda_2\lambda_3 + 6\lambda_3^2$$

Wegen  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  und  $\lambda_3 > 0$  ist der Wert positiv, so dass das Gleichungssystem wieder eindeutig gelöst werden kann.  $\square$

Im folgenden Teil beschreiben wir einen kubischen Lagrange-Interpolanten für unsere Unterteilungsmethode aus Kapitel 3. Die Hermite-Interpolation für diese Unterteilung haben wir bereits ausführlich behandelt. Für den Fall  $S_3^1(\bar{\Delta})$  erhalten wir aus Satz 3.6 und 3.10 einen Hermite-Interpolanten  $s$ , der für jede Funktion  $f \in C^1(\Omega)$  eindeutig durch die folgenden Interpolationsbedingungen bestimmt ist.

(i) Für jeden Eckpunkt  $v_i \in \Delta$  gelte:

$$\begin{aligned} s(v_i) &= f(v_i) \\ D_x s(v_i) &= D_x f(v_i) \\ D_y s(v_i) &= D_y f(v_i) \end{aligned}$$

(ii) Für jedes Dreieck  $T_i = \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$  mit  $\theta_i \in \{0, 2\}$  sei

$$e_i := \begin{cases} \overline{v_{i,1}v_{i,2}} & \text{für } \theta_i = 0 \\ \overline{v_{i,3}v_{i,1}} & \text{für } \theta_i = 2 \end{cases}$$

und  $z_i$  ein Vektor, der nicht parallel zur Kante  $e_i$  verläuft. Weiter sei  $w_i$  ein Punkt im Innern der Kante  $e_i$ . Dann gelte:

$$\begin{aligned} D_{z_i} s(w_i) &= D_{z_i} f(w_i) && \text{für den Interpolanten aus Satz 3.6} \\ D_{z_i} s|_{e_i} &\in \Pi_1 && \text{für den Interpolanten aus Satz 3.10} \end{aligned}$$

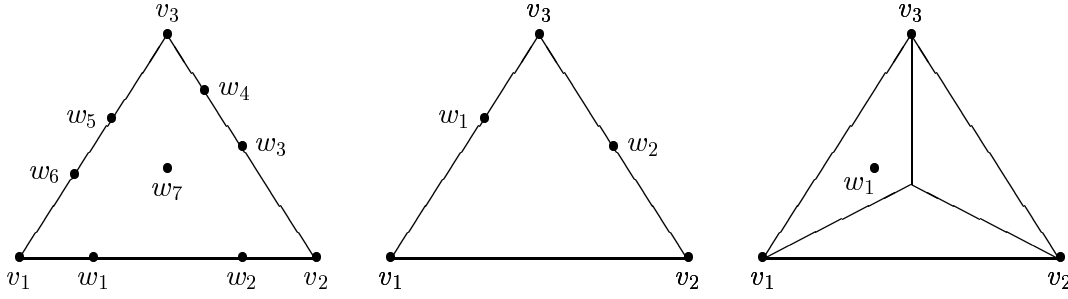
Für eine Nummerierung der Dreiecke mit  $\Theta_0 = 1$  und  $\Theta_2 = 0$  sind die beiden Interpolanten weitgehend identisch. Lediglich im ersten Dreieck benötigt der vollständige Interpolant eine zusätzliche Ableitung an einer Kante des Dreiecks.

Auch bei der Konstruktion eines Lagrange-Interpolanten wollen wir möglichst wenige Dreiecke unterteilen. Wir können deshalb nicht die Nummerierung aus Lemma 5.1 wählen. In Kapitel 3 haben wir aber bereits gezeigt, dass es zu jeder Triangulierung eine optimale Nummerierung mit  $\Theta_0 = 1$  gibt. Wir wollen dies deshalb im Folgenden voraussetzen und definieren nun die Interpolationsmengen für unseren Lagrange-Interpolanten.

Für das Dreieck  $T_1$  wählen wir die gleichen Interpolationspunkte wie im Fall  $S_3^{0,1}(\Delta)$ . Gilt  $\theta_i = 1$ , dann lassen sich zwei Fälle unterscheiden. Enthält die Teiltriangulierung  $\Delta_{i-1}$  bereits alle drei Eckpunkte  $v_{i,j}$  von  $T_i$ , dann setzen wir  $A_i = \emptyset$ . Diesen Fall erhalten wir für Dreiecke  $T_j \in \Delta$  mit  $\theta_j = 3$ . Sind dagegen nur die beiden Eckpunkte  $v_{i,1}$  und  $v_{i,2}$  in  $\Delta_{i-1}$  enthalten, dann wählen wir jeweils einen Punkt  $w_{i,j}$ ,  $j = 1, 2$  auf den Kanten  $\overline{v_{i,j}v_{i,3}}$  und setzen

$$\mathcal{A}_i := \{v_{i,3}, w_{i,1}, w_{i,2}\}$$

Für  $\theta_i = 2$  wählen wir die Menge  $\mathcal{A}_i$  wie im Fall  $S_3^1(\Delta_{CT})$  und für  $\theta_i = 3$  definieren wir  $\mathcal{A}_i := \emptyset$ . Die Abbildung 5.5 zeigt die Interpolationsmengen für die ersten drei Fälle.

Abbildung 5.5: Interpolationsmengen  $\mathcal{A}_i$  für  $S_3^1(\tilde{\Delta})$ 

**Satz 5.6.** *Es seien  $\mathcal{A}_i$  wie oben definiert und  $\mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^N \mathcal{A}_i$ , dann gibt es zu jeder Funktion  $f \in C(\Omega)$  einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in S_3^1(\tilde{\Delta})$  mit  $s(v) = f(v)$ ,  $v \in \mathcal{A}$ .*

**Beweis:** Wegen  $V_I = \Theta_2 + 2\Theta_3$  und  $N = \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3$  erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= 10\Theta_0 + 3(\Theta_1 - \Theta_3) + \Theta_2 \\ &= 3(\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) - 3(\Theta_2 + 2\Theta_3) + \Theta_2 + 1 \\ &= 3N - 3V_I + \Theta_2 + 1 = 3V + \Theta_2 + 1 \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach Satz 2.10

$$\dim S_3^1(\tilde{\Delta}) \geq 3V_B + 2(V_I + \Theta_2 + \Theta_3) + 1 = 3V + \Theta_2 + 1$$

Wir zeigen nun wieder, dass alle Bernstein-Bézier-Koeffizienten des Interpolanten aus den Interpolationswerten berechnet werden können. Für das Dreieck  $T_1$  haben wir dies bereits in Satz 5.3 gezeigt. Ist  $T_i$  ein Dreieck mit  $\theta_i = 1$ , so dass alle Eckpunkte in  $\Delta_{i-1}$  enthalten sind, dann ergeben sich die Koeffizienten  $c_\alpha^i$  mit  $\alpha \neq (1, 1, 1)$  aus den  $C^1$ -Bedingungen in den Eckpunkten von  $T_i$ . Den Koeffizienten  $c_{111}^i$  erhalten wir direkt aus der  $C^1$ -Bedingung an der Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$ . Enthält  $\Delta_{i-1}$  nur die beiden Eckpunkte  $v_{i,1}$  und  $v_{i,2}$ , dann ergeben sich die Koeffizienten  $c_{003}^i$ ,  $c_{102}^i$  und  $c_{012}^i$  aus den Funktionswerten in den Punkten  $v_{i,1}$ ,  $w_{i,1}$  und  $w_{i,2}$ . Den Koeffizienten  $c_{111}^i$  erhalten wir wieder aus der  $C^1$ -Bedingung über die Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$ . Der Fall  $\theta_i = 2$  folgt direkt aus Satz 5.5 und der Fall  $\theta_i = 3$  aus Satz 3.6.  $\square$

### 5.2.2 Interpolation mit quadratischen Splines

Für die Interpolation mit quadratischen  $C^1$ -Splines kann eine Unterteilung mit Powell-Sabin Elementen [121] verwendet werden. Bei dieser Unterteilung wird jedes Dreieck in sechs Mikro-Dreiecke aufgeteilt. Hierzu wird in jedem Dreieck der Mittelpunkt des Inkreises eingezeichnet und dieser mit den drei Eckpunkten sowie den Mittelpunkten

der benachbarten Dreiecke verbunden. Durch die Wahl des Innenkreises ist gesichert, dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier benachbarter Dreiecke die gemeinsame Kante schneidet (siehe Farin [64] und Sablonnière [125]). Somit erhalten wir durch diese Unterteilung eine Triangulierung  $\Delta_{PS}$ , bei der auf jeder inneren Kante ein singulärer Eckpunkt entsteht.

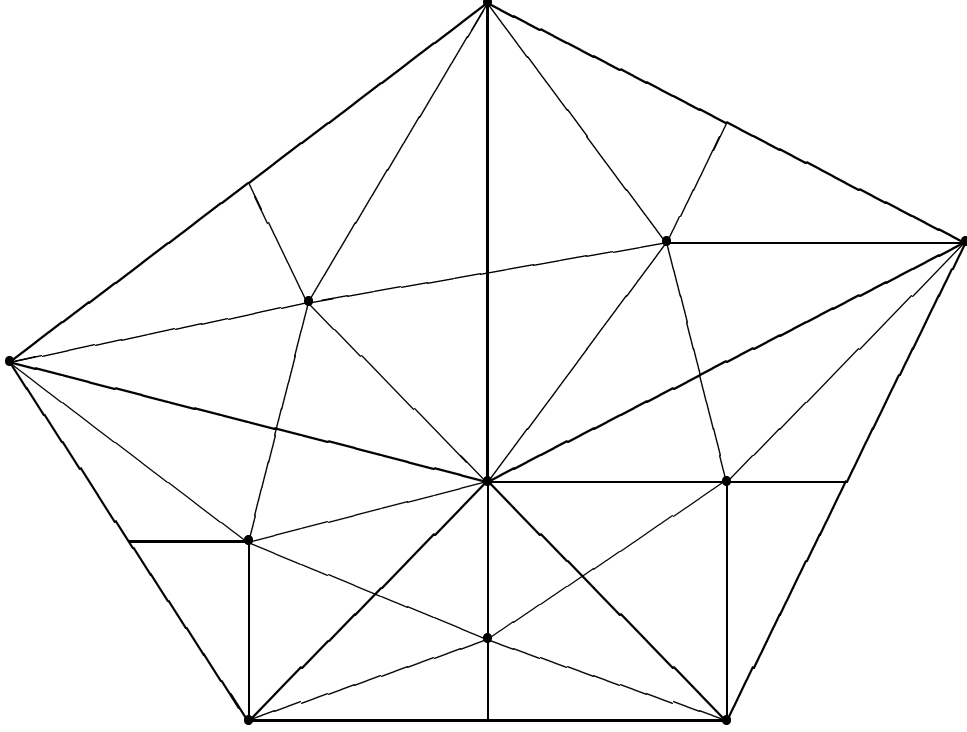


Abbildung 5.6: Triangulierung mit Powell-Sabin Elementen

Für die Unterteilung  $\Delta_{PS}$  mit Powell-Sabin Elementen hat Farin [64] gezeigt, dass es zu jeder Funktion  $f \in C^1(\Omega)$  einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in S_2^1(\Delta_{PS})$  gibt, der für jeden Eckpunkt  $v \in \Delta$  die Interpolationsbedingungen

$$\begin{aligned} s(v) &= f(v) \\ D_x s(v) &= D_x f(v) \\ D_y s(v) &= D_y f(v) \end{aligned}$$

erfüllt.

Mit einem iterativen Verfahren kann man auch Lagrange-Interpolationsmengen für die Unterteilung nach Powell-Sabin konstruieren. Wir wählen hierzu wieder die Nummerierung aus Lemma 5.1 und beschreiben die Interpolationsmengen für diese Reihenfolge. Es wird vorausgesetzt, dass die Eckpunkte  $v_{i,1}$ ,  $v_{i,2}$  und  $v_{i,3}$  wie in Kapitel 3 nummeriert

sind. Die zusätzlichen Hilfspunkte auf den Kanten bezeichnen wir mit  $v_{i,4}$ ,  $v_{i,5}$  und  $v_{i,6}$  und den Mittelpunkt des Innenkreises von  $T_i$  mit  $v_{i,7}$  (siehe Abbildung 5.7). Mit diesen Bezeichnungen können wir die sechs Mikro-Dreiecke in  $T_i$  wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} T_{i,1} &:= \triangle(v_{i,1}, v_{i,4}, v_{i,7}) & T_{i,2} &:= \triangle(v_{i,2}, v_{i,4}, v_{i,7}) & T_{i,3} &:= \triangle(v_{i,2}, v_{i,5}, v_{i,7}) \\ T_{i,4} &:= \triangle(v_{i,3}, v_{i,5}, v_{i,7}) & T_{i,5} &:= \triangle(v_{i,3}, v_{i,6}, v_{i,7}) & T_{i,6} &:= \triangle(v_{i,1}, v_{i,6}, v_{i,7}) \end{aligned}$$

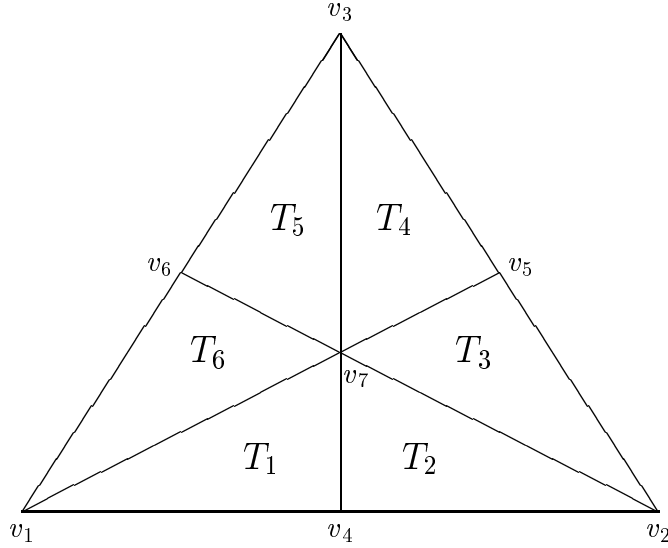


Abbildung 5.7: Unterteilung nach Powell-Sabin

Für diese Unterteilung beschreiben wir nun die folgenden Interpolationsmengen. Auf dem ersten Dreieck wählen wir sechs Punkte  $w_{1,1}, \dots, w_{1,6}$ , so dass  $v_{1,j}$ ,  $w_{1,2j-1}$ ,  $w_{1,2j}$  und  $v_{1,j+1}$  paarweise verschiedene Punkte auf der Kante  $\overline{v_{1,j}v_{1,j+1}}$  sind und setzen

$$\mathcal{A}_1 := \{v_{1,1}, \dots, v_{1,3}, w_{1,1}, \dots, w_{1,6}\}$$

Gilt  $\theta_i = 1$ , dann wählen wir einen Punkt  $w_{i,1}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$  und einen Punkt  $w_{i,2}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$  und definieren

$$\mathcal{A}_i := \{v_{i,3}, w_{i,1}, w_{i,2}\}$$

Für ein Dreieck  $T_i$  mit  $\theta_i = 2$  definieren wir  $\mathcal{A}_i := \emptyset$ .

**Satz 5.7.** *Es seien  $\mathcal{A}_i$  wie oben definiert und  $\mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^N \mathcal{A}_i$ , dann gibt es zu jeder Funktion  $f \in C(\Omega)$  einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in S_2^1(\Delta_{PS})$  mit  $s(v) = f(v)$ ,  $v \in \mathcal{A}$ .*

**Beweis:** Für die Anzahl der Bedingungen erhalten wir

$$|\mathcal{A}| = 9\Theta_0 + 3\Theta_1 = 9 + 3(N - V_I - 1) = 3V = \dim S_2^1(\Delta_{PS})$$

Wir zeigen wieder, dass durch die Funktionswerte in den Interpolationspunkten alle Bernstein-Bézier-Koeffizienten des Interpolanten berechnet werden können. Man überlegt sich leicht, dass es genügt die Koeffizienten auf den äußeren Kanten eines Dreiecks  $T_i \in \Delta$  zu bestimmen (siehe Farin [64]). Die übrigen Koeffizienten ergeben sich anschließend direkt aus den  $C^1$ -Bedingungen an den inneren Kanten von  $T_i$ . Im Folgenden bezeichnen wir mit  $a_1, \dots, a_{12}$  die Bernstein-Bézier-Koeffizienten auf den Kanten eines Dreiecks  $T_i$  (siehe Abbildung 5.8).

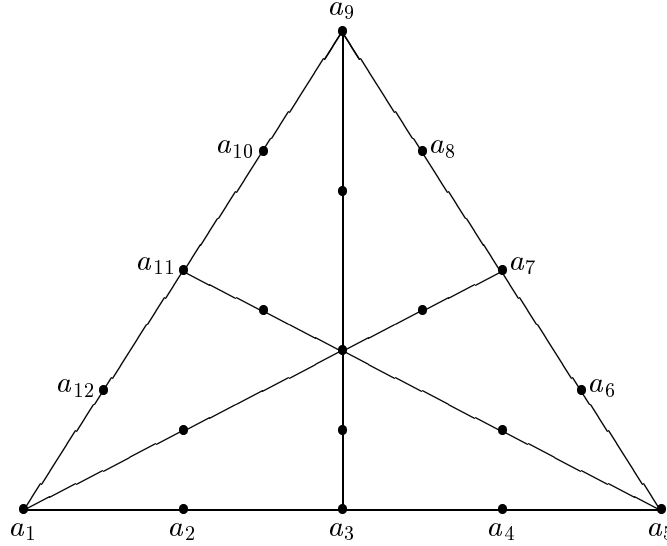


Abbildung 5.8: Bernstein-Bézier-Koeffizienten für Powell-Sabin Element

Für das Dreieck  $T_1$  betrachten wir nun die Koeffizienten  $a_1, \dots, a_5$  auf der Kante  $\overline{v_{1,1}v_{1,2}}$ . Durch die Funktionswerte in den beiden Eckpunkten ergeben sich direkt die Koeffizienten  $a_1$  und  $a_5$ . Zur Berechnung der übrigen drei Koeffizienten unterscheiden wir zwei Fälle. Im ersten Fall befinden sich beide Interpolationspunkte  $w_{1,1}$  und  $w_{1,2}$  auf der Kante  $\overline{v_{1,1}v_{1,4}}$ . Wir erhalten hierfür das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= (1 - \lambda_1)(\lambda_1 a_2 + (1 - \lambda_1) a_3) \\ \gamma_2 &= (1 - \lambda_2)(\lambda_2 a_2 + (1 - \lambda_2) a_3)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}w_{1,1} &= \lambda_1 v_{1,1} + (1 - \lambda_1) v_{1,4} \\ w_{1,2} &= \lambda_2 v_{1,1} + (1 - \lambda_2) v_{1,4}\end{aligned}$$

Wegen  $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < 1$  und  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  besitzt das Gleichungssystem wieder eine eindeutige Lösung. Da  $\overline{v_{i,4}v_{i,7}}$  eine degenerierte Kante ist, lässt sich der Koeffizient  $a_4$  nun direkt aus  $a_2$  und  $a_3$  berechnen. Im zweiten Fall befindet sich auf jeder Kante

$\overline{v_{1,1}v_{1,4}}$  und  $\overline{v_{1,2}v_{1,4}}$  ein Interpolationspunkt. Aus den Interpolationsbedingungen und der  $C^1$ -Bedingung im Eckpunkt  $v_{1,4}$  ergibt sich nun das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= (1 - \lambda_1)(\lambda_1 a_2 + (1 - \lambda_1)a_3) \\ \gamma_2 &= (1 - \lambda_2)(\lambda_2 a_4 + (1 - \lambda_2)a_3) \\ 0 &= \lambda_3 a_2 + (1 - \lambda_3)a_3 - a_4\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}w_{1,1} &= \lambda_1 v_{1,1} + (1 - \lambda_1)v_{1,4} \\ w_{1,2} &= \lambda_2 v_{1,2} + (1 - \lambda_2)v_{1,4} \\ v_{1,2} &= \lambda_3 v_{1,1} + (1 - \lambda_3)v_{1,4}\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt nun  $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < 1$  und  $\lambda_3 < 0$ . Weiterhin können nicht beide Werte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gleich Null sein, da andernfalls die beiden Interpolationspunkte  $w_{1,1}$  und  $w_{1,2}$  gleich wären. Somit folgt

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 1 - \lambda_3 & -1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 < 0$$

Also sind die Koeffizienten  $a_2$ ,  $a_3$  und  $a_4$  eindeutig bestimmt. Analog zeigt man dies für die anderen beiden Kanten  $\overline{v_{1,2}v_{1,3}}$  und  $\overline{v_{1,3}v_{1,1}}$ .

Gilt nun  $\theta_i = 1$ , dann sind aufgrund der  $C^1$ -Bedingung an den Kanten  $\overline{v_{i,1}v_{i,4}}$  und  $\overline{v_{i,2}v_{i,4}}$  die Koeffizienten  $a_1, \dots, a_6, a_{12}$  bestimmt. Wir betrachten nun die Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$  und unterscheiden wieder zwei Fälle. Im ersten Fall liegt der Interpolationspunkt  $w_{i,1}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,6}}$ . Dann erhalten wir den Koeffizienten  $a_{11}$  direkt aus dem Funktionswert in  $w_{i,1}$ . Es gilt hier:

$$a_{11} = \frac{f(w_{i,1}) - \lambda^2 a_1 - 2\lambda(1 - \lambda)a_{12}}{(1 - \lambda)^2}$$

mit

$$w_{i,1} = \lambda v_{i,1} + (1 - \lambda)v_{i,6}, \quad 0 \leq \lambda < 1$$

Den Koeffizienten  $a_{10}$  berechnen wir anschließend aus der  $C^1$ -Bedingung im Eckpunkt  $v_{i,6}$ . Liegt nun  $w_{i,1}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,3}v_{i,6}}$ , dann ergibt sich aus der Interpolationsbedingung in  $w_{i,1}$  und der  $C^1$ -Bedingung in  $v_{i,6}$  das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\gamma &= (1 - \lambda_1)(\lambda_1 a_{10} + (1 - \lambda_1)a_{11}) \\ a_{12} &= \lambda_2 a_{10} + (1 - \lambda_2)a_{11}\end{aligned}$$



mit

$$\begin{aligned} w_{i,1} &= \lambda_1 v_{i,3} + (1 - \lambda_1) v_{i,6} \\ v_{i,1} &= \lambda_2 v_{i,3} + (1 - \lambda_2) v_{i,6} \end{aligned}$$

Es gilt nun  $\lambda_1 \geq 0$  und  $\lambda_2 < 0$ , so dass das Gleichungssystem wieder eine eindeutige Lösung besitzt. Analog verfährt man wieder für die Koeffizienten auf der Kante  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$ .

Für ein Dreieck  $T_i$  mit  $\theta_i = 2$  ergeben sich aus den  $C^1$ -Bedingungen in den drei Eckpunkten von  $T_i$  die Koeffizienten  $a_1, a_2, a_4, a_5, a_6, a_8, a_9, a_{10}$  und  $a_{12}$ . Die restlichen drei Koeffizienten  $a_3, a_7$  und  $a_{11}$  berechnen sich aus der  $C^1$ -Bedingung in den Eckpunkten  $v_{i,4}, v_{i,5}$  und  $v_{i,6}$ .  $\square$

Im zweiten Teil dieses Abschnitts behandeln wir nun eine iterative Methode zur Unterteilung der Dreiecke. Die Methode, die wir in Kapitel 3 vorgestellt haben, eignet sich nur für Unterteilungen, die keine zusätzlichen Hilfspunkte auf den Kanten von  $\Delta$  benötigen. Für eine Unterteilung wie der Powell-Sabin Split kann sie deshalb nicht verwendet werden. Wird nämlich durch die Unterteilung eines Dreiecks  $T_i$  ein Punkt auf einer inneren Kante  $e$  eingefügt, so muss das benachbarte Dreieck mit der gemeinsamen Kante  $e$  ebenfalls unterteilt werden. Andernfalls wäre diese Unterteilung keine Triangulierung (siehe Abbildung 5.9).

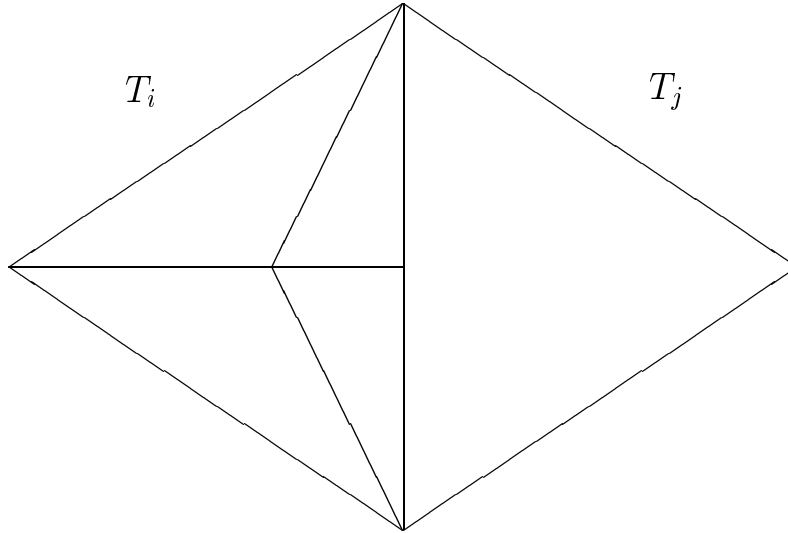


Abbildung 5.9: Unterteilung mit Hilfspunkten auf den Kanten

Bei der folgenden Unterteilungsmethode müssen wir jedoch nicht alle Dreiecke unterteilen. Hierdurch können wir die Anzahl der Interpolationsbedingungen gegenüber dem Interpolanten mit Powell-Sabin Elementen deutlich reduzieren. Wir benötigen für diese Unterteilung nur die Werte in den Eckpunkten von  $\Delta$ , sowie drei zusätzliche Interpolationspunkte in einem Dreieck. Wie bei dem Powell-Sabin Split werden bei unserer

Methode zusätzliche Hilfspunkte auf den Kanten der Triangulierung hinzugefügt. Wir benötigen allerdings nicht auf jeder Kante einen Hilfspunkt. Die Anzahl der Hilfspunkte für ein Dreieck wird wieder durch die Nummerierung der Dreiecke von  $\Delta$  bestimmt.

Für unsere Unterteilung wählen wir die Nummerierung nach Lemma 5.1. Für diese Nummerierung beschreiben wir nun die Unterteilung der Dreiecke von  $\Delta$ . Das erste Dreieck  $T_1$  wird nicht unterteilt. Ein Dreieck  $T_i$  mit  $\theta_i = 1$  besitzt genau ein benachbartes Dreieck  $T_j$  mit  $j < i$ . Gilt  $\theta_j \leq 1$ , dann wird  $T_i$  nicht unterteilt. Gilt  $\theta_j = 2$ , dann werden  $T_i$  und  $T_j$  wie folgt unterteilt. Wir fügen in beiden Dreiecken die Kanten von den Eckpunkten zum Mittelpunkt des Innenkreises hinzu und verbinden die beiden Mittelpunkte miteinander (siehe Abbildung 5.10). Wir erhalten somit einen singulären Eckpunkt  $w$  auf der gemeinsamen Kante von  $T_i$  und  $T_j$ .

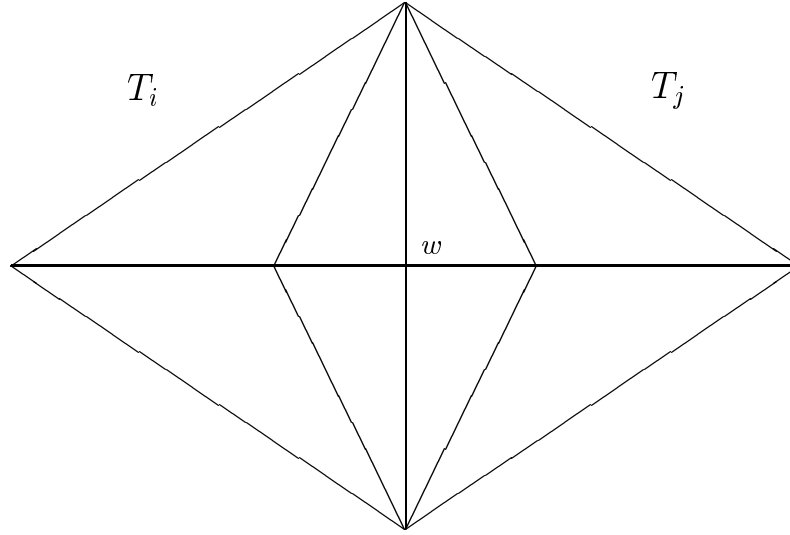


Abbildung 5.10: Unterteilung eines Dreiecks  $T_i$  mit  $\theta_i = 1$

Ein Dreieck  $T_i$  mit  $\theta_i = 2$  wird immer unterteilt. Wir bezeichnen mit  $T_{i_1}$ ,  $T_{i_2}$  und  $T_{i_3}$ ,  $i_1 < i_2 < i < i_3$  die benachbarten Dreiecke<sup>1</sup> von  $T_i$ . Hierfür können wir die folgenden Fälle unterscheiden.

- (i) Es gilt  $\theta_{i_1}, \theta_{i_2} < 2$ . Dann unterteilen wir  $T_i$  und, falls vorhanden  $T_{i_3}$ , indem wir die Kanten von den Eckpunkten zum Mittelpunkt des Innenkreises einzeichnen und verbinden die beiden Mittelpunkte miteinander. Existiert  $T_{i_3}$  nicht, dann besitzt  $T_i$  eine äußere Kante und wir fügen die Kante vom Mittelpunkt des Innenkreises zum Mittelpunkt der äußeren Kante hinzu. In diesem Fall enthält  $T_i$  nach der Unterteilung vier Dreiecke (siehe Abbildung 5.11 (i)).

- (ii) Es gilt  $\theta_{i_1} < 2$  und  $\theta_{i_2} = 2$ . Wir unterteilen  $T_i$  und, falls vorhanden  $T_{i_3}$  wie

---

<sup>1</sup>Das Dreieck  $T_{i_3}$  existiert nur für Dreiecke, die nicht am Rand liegen.

im Fall (i). Zudem fügen wir die Kante zwischen den beiden Mittelpunkten der Innenkreise von  $T_{i_2}$  und  $T_i$  hinzu, so dass ein singulärer Eckpunkt auf der gemeinsamen Kante entsteht. In diesem Fall enthält  $T_i$  nach der Unterteilung fünf Dreiecke (siehe Abbildung 5.11 (ii)). Analog erfolgt die Unterteilung für  $\theta_{i_1} = 2$  und  $\theta_{i_2} < 2$ .

- (iii) Es gilt  $\theta_{i_1} = \theta_{i_2} = 2$ . Wir unterteilen  $T_i$  und, falls vorhanden  $T_{i_3}$  wie im Fall (i). Zudem fügen wir zwei Kanten zwischen den beiden Mittelpunkten der Innenkreise von  $T_{i_1}$  und  $T_i$ , sowie  $T_{i_2}$  und  $T_i$  hinzu. In diesem Fall enthält  $T_i$  nach der Unterteilung sechs Dreiecke (siehe Abbildung 5.11 (iii)).

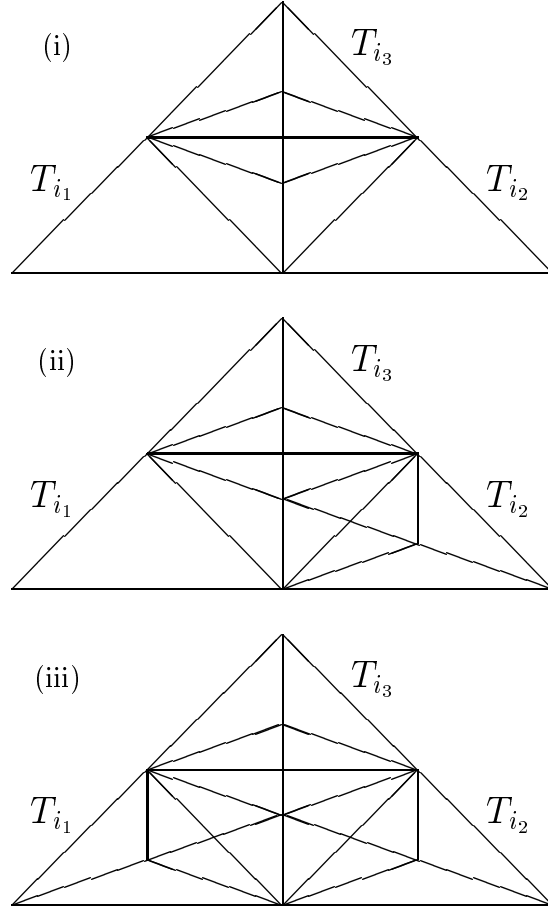


Abbildung 5.11: Unterteilung eines Dreiecks  $T_i$  mit  $\theta_i = 2$

Wie in den vorherigen Kapiteln bezeichnen wir mit  $\tilde{\Delta}$  die Triangulierung, die wir durch diese Unterteilung aus  $\Delta$  erhalten. Wir beschreiben nun induktiv eine bestimmende Menge für die Teiltriangulierung  $\tilde{\Delta}_i$ . Für  $\tilde{\Delta}_1$  gilt unmittelbar das folgende Lemma.



Für den Fall  $\theta_{i_1} = 2$  unterteilen wir  $T_i$  in vier Mikro-Dreiecke. Aus der  $C^1$ -Bedingung an den gemeinsamen Kanten mit  $T_{i_1}$  und in den beiden Eckpunkten  $v_{i,1}$  und  $v_{i,2}$  ergeben sich die, in Abbildung 5.12 mit \* gekennzeichneten Koeffizienten. Der Koeffizient  $a_1$  im Eckpunkt  $v_{i,3}$  ist 0, da der Eckpunkt in  $\mathcal{D}_i$  enthalten ist. Die verbleibenden Koeffizienten  $a_2$  und  $a_3$  berechnen sich nun aus der  $C^1$ -Bedingung an den inneren Kanten von  $T_i$ . Also ist auch in diesem Fall  $\mathcal{D}_i$  eine bestimmende Menge von  $S_2^1(\tilde{\Delta}_i)$ .

Aus Satz 2.10 folgt, dass  $\mathcal{D}_i$  in beiden Fällen minimal ist.  $\square$

Als letztes behandeln wir nun Dreiecke  $T_i$  mit  $\theta_i = 2$ . In diesem Fall sind bereits alle drei Eckpunkte  $v_{i,1}$ ,  $v_{i,2}$  und  $v_{i,3}$  des Dreiecks  $T_i$  in der Teiltriangulierung  $\Delta_{i-1}$  enthalten. Das folgende Lemma zeigt, dass für unsere Unterteilung die minimale bestimmende Menge  $\mathcal{D}_{i-1}$  für  $\tilde{\Delta}_{i-1}$  bereits eine minimale bestimmende Menge für  $\tilde{\Delta}_i$  ist.

**Lemma 5.10.** *Sei  $\Delta$  eine Triangulierung und  $\tilde{\Delta}$  die Unterteilung zu  $\Delta$ . Weiter sei  $T_i \in \Delta$  ein Dreieck mit  $\theta_i = 2$  und  $\mathcal{D}_{i-1}$  eine minimale bestimmende Menge von  $\tilde{\Delta}_{i-1}$ . Dann ist*

$$\mathcal{D}_i := \mathcal{D}_{i-1}$$

*eine minimale bestimmende Menge von  $S_2^1(\tilde{\Delta}_i)$ .*

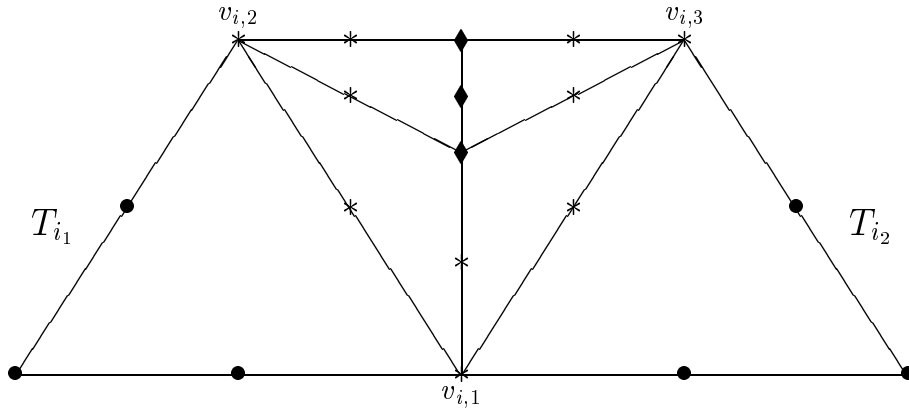


Abbildung 5.13: Bestimmende Menge eines Dreiecks  $T_i$  mit  $\theta_i = 2$

**Beweis:** Es seien alle Koeffizienten aus  $\mathcal{D}_{i-1}$  gleich 0. Zu  $T_i$  gibt es zwei Dreiecke  $T_{i_1}, T_{i_2} \in \Delta_{i-1}$  mit einer gemeinsamen Kante zu  $T_i$ . Nach unserer Unterteilungsmethode können wir drei Fälle unterscheiden. Gilt  $\theta_{i_1}, \theta_{i_2} < 2$ , dann erhalten wir die, in Abbildung 5.13 dargestellte Unterteilung.<sup>2</sup> Die, mit \* gekennzeichneten Koeffizienten ergeben sich wieder direkt aus den  $C^1$ -Bedingungen an den gemeinsamen Kanten

<sup>2</sup>Die Dreiecke  $T_{i_1}$  und  $T_{i_2}$  können auch unterteilt sein. In allen Fällen enthält die Unterteilung aber keine Hilfspunkte auf den gemeinsamen Kanten  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  und  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$ .

$\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  und  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$ , sowie den Eckpunkten  $v_{i,1}$ ,  $v_{i,2}$  und  $v_{i,3}$ . Die verbleibenden, mit  $\blacklozenge$  gekennzeichneten Koeffizienten berechnen sich nun aus der  $C^1$ -Bedingung an den inneren Kanten und dem inneren Eckpunkt von  $T_i$ . Somit ist  $\mathcal{D}_{i-1}$  eine bestimmende Menge.

Im zweiten Fall gilt nun  $\theta_{i_1} < 2$  und  $\theta_{i_2} = 2$ , so dass  $T_{i_2}$  unterteilt ist und auf der gemeinsamen Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$  ein singulärer Eckpunkt entsteht. Die Abbildung 5.14 zeigt die Unterteilung für diesen Fall. Auch hier ergeben sich die, mit  $*$  gekennzeichneten Koeffizienten direkt aus den  $C^1$ -Bedingungen an den gemeinsamen Kanten und den Eckpunkten von  $T_i$ . Sind diese Koeffizienten gegeben, dann erhält man aus der  $C^1$ -Bedingung an den inneren Kanten und dem inneren Eckpunkt von  $T_i$  die verbleibenden, mit  $\blacklozenge$  gekennzeichneten Koeffizienten. Also ist  $\mathcal{D}_{i-1}$  auch in diesem Fall eine bestimmende Menge.

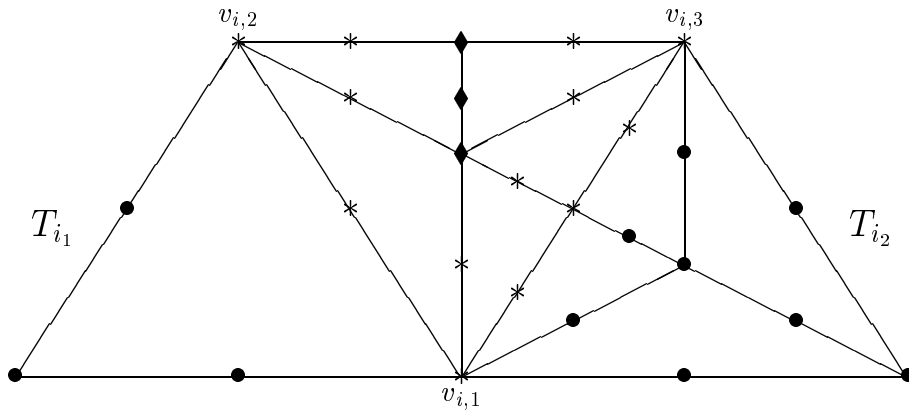


Abbildung 5.14: Bestimmende Menge eines Dreiecks  $T_i$  mit  $\theta_i = 2$

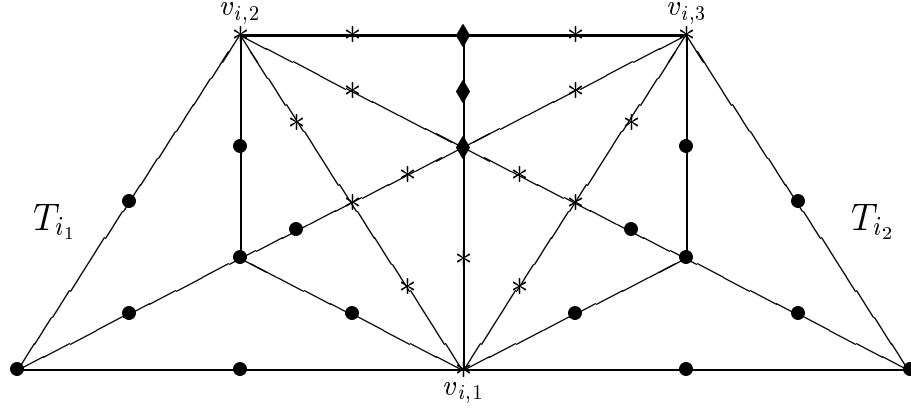
Schließlich verbleibt noch der Fall  $\theta_{i_1} = \theta_{i_2} = 2$ . Hier sind  $T_{i_1}$  und  $T_{i_2}$  unterteilt und die Triangulierung  $\tilde{\Delta}$  enthält zwei singuläre Eckpunkte auf den gemeinsamen Kanten  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  und  $\overline{v_{i,1}v_{i,3}}$  (siehe Abbildung 5.15). Mit den gleichen Argumenten wie im ersten und zweiten Fall ergeben sich hier zunächst die, mit  $*$  gekennzeichneten Koeffizienten. Anschließend lassen sich die, mit  $\blacklozenge$  bezeichneten Koeffizienten berechnen, so dass  $\mathcal{D}_{i-1}$  wieder eine bestimmende Menge ist.

In allen drei Fällen folgt aus Satz 2.10

$$\dim S_2^1(\tilde{\Delta}_i) = \dim S_2^1(\tilde{\Delta}_{i-1})$$

Somit ist  $\mathcal{D}_{i-1}$  minimal.  $\square$

Aus Lemma 5.9 und 5.10 erhalten wir mit  $\mathcal{D} := \mathcal{D}_N$  eine minimale bestimmende Menge für  $S_2^1(\tilde{\Delta})$ . Bei der Konstruktion der minimalen bestimmenden Menge  $\mathcal{D}_i$  haben wir, mit

Abbildung 5.15: Bestimmende Menge eines Dreiecks  $T_i$  mit  $\theta_i = 2$ 

Ausnahme des ersten Dreiecks  $T_1$  nur die Eckpunkte der Triangulierung  $\Delta$  hinzugefügt. Wir erhalten somit den folgenden Satz.

**Satz 5.11.** *Sei  $\Delta$  eine Triangulierung und  $\tilde{\Delta}$  die Unterteilung zu  $\Delta$ . Dann ist*

$$\mathcal{D} := \mathcal{V} \cup \{P_{110}^1, P_{101}^1, P_{011}^1\}$$

eine minimale bestimmende Menge von  $S_2^1(\tilde{\Delta})$  und es gilt

$$\dim S_2^1(\tilde{\Delta}) = V + 3$$

Diese minimale bestimmende Menge liefert uns nun einen Lagrange-Interpolanten  $s \in S_2^1(\tilde{\Delta})$ , der nur die Eckpunkte von  $\Delta$  und drei Interpolationspunkte in einem Dreieck benötigt. Er ist deshalb gut zur direkten Interpolation verstreuter Daten geeignet, da zusätzliche Lagrange-Punkte in den Dreiecken oder Ableitungen in den Eckpunkten nicht benötigt werden.

**Satz 5.12.** *Sei  $\Delta$  eine Triangulierung und  $\tilde{\Delta}$  wie oben konstruiert. Weiter seien*

$$w_j := \lambda_j v_{1,j} + (1 - \lambda_j) v_{1,j+1}$$

mit  $\lambda_j \in (0, 1)$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Dann gibt es zu jeder Funktion  $f \in C(\Omega)$  einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in S_2^1(\tilde{\Delta})$  mit

$$\begin{aligned} s(v) &= f(v) & v &\in \mathcal{V} \\ s(w_j) &= f(w_j) & j &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

**Beweis:** Offensichtlich ist die Menge  $\{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, w_1, w_2, w_3\}$  eine Interpolationsmenge für  $\tilde{\Pi}_2$ . Somit erhalten wir alle Bernstein-Bézier-Koeffizienten in  $T_1$  aus den Interpolationswerten in diesen Punkten. Für alle anderen Dreiecke enthält die minimale bestimmende Menge aus Satz 5.11 nur die Eckpunkte. Die Bernstein-Bézier-Koeffizienten in den Eckpunkten ergeben sich nach Satz 2.3 direkt aus den Funktionswerten. Somit lassen sich alle Koeffizienten der bestimmenden Menge aus den Interpolationsbedingungen berechnen. Offensichtlich ist die Anzahl der Interpolationsbedingungen gleich  $V + 3$ , so dass  $s$  eindeutig bestimmt ist.  $\square$

### 5.3 Konvexe Quadrangulierungen

Im letzten Abschnitt behandeln wir die Lagrange-Interpolation mit kubischen Splines auf konvexen Quadrangulierungen. Wir verwenden hier zwei Unterteilungen mit Elementen nach Fraeijs de Veubeke und Sander (FVS) [67]. Zunächst untersuchen wir die klassische Unterteilung nach Fraeijs de Veubeke und Sander, bei der alle Vierecke in vier Dreiecke unterteilt werden. Zur Beschreibung der Interpolationsmengen verwenden wir eine Nummerierung mit  $\Theta_0 = 1$  und  $\Theta_4 = 0$  nach Lemma 5.2. Die Eckpunkte  $v_{i,j}$  und Dreiecke  $T_{i,j}$  der Vierecke  $Q_i$  seien wie in Kapitel 4.2 nummeriert. Mit  $v_{i,5}$  bezeichnen wir wieder den singulären Eckpunkt in  $Q_i$ . Die Interpolationsmengen  $\mathcal{A}_i$  für die Vierecke  $Q_i$  beschreiben wir wieder in Abhängigkeit der Anzahl der gemeinsamen Kanten mit der Teilquadrangulierung  $\diamond_{i-1}$ .

Für das Viereck  $Q_1$  wählen wir acht Punkte  $w_{1,1}, \dots, w_{1,8}$ , so dass  $v_{1,j}$ ,  $w_{1,2j-1}$ ,  $w_{1,2j}$  und  $v_{1,j+1}$  paarweise verschiedene Punkte auf der Kante  $\overline{v_{1,j}v_{1,j+1}}$  sind. Weiter wählen wir drei Punkte  $w_{1,9}$ ,  $w_{1,10}$  und  $w_{1,11}$  im Innern von  $Q_1$ , die auf drei verschiedenen Kanten  $\overline{v_{1,j}v_{1,5}}$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  liegen. Schließlich wird noch ein Punkt  $w_{1,12}$  im Innern eines Dreiecks  $T_{1,j}$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  gewählt. Für diese Punkte definieren wir

$$\mathcal{A}_1 := \{v_{1,1}, \dots, v_{1,4}, w_{1,1}, \dots, w_{1,12}\}$$

Für ein Viereck  $Q_i$  mit  $\theta_i = 1$  wählen wir einen Punkt  $w_{i,1}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$ , zwei Punkte  $w_{i,2}$  und  $w_{i,3}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,3}v_{i,4}}$  und einen Punkt  $w_{i,4}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,4}v_{i,1}}$ . Weiterhin wählen wir wieder drei Punkte  $w_{i,5}$ ,  $w_{i,6}$  und  $w_{i,7}$  im Innern von  $Q_i$ , die auf drei verschiedenen Kanten  $\overline{v_{i,j}v_{i,5}}$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  liegen und setzen

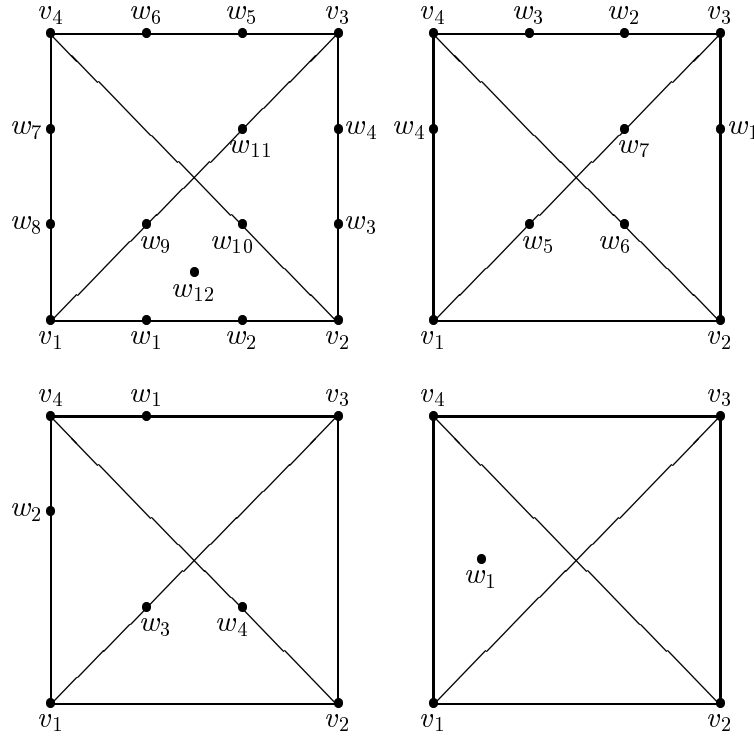
$$\mathcal{A}_i := \{v_{i,3}, v_{i,4}, w_{i,1}, \dots, w_{i,7}\}$$

Gilt nun  $\theta_i = 2$ , dann wählen wir einen Punkt  $w_{i,1}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,3}v_{i,4}}$  und einen Punkt  $w_{i,2}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,4}v_{i,1}}$ . Zudem werden zwei Punkte  $w_{i,3}$  und  $w_{i,4}$  im Innern von  $Q_i$  ausgewählt, die auf zwei, nicht kollinearen Kanten  $\overline{v_{i,j}v_{i,5}}$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  liegen. Hierfür definieren wir

$$\mathcal{A}_i := \{v_{i,4}, w_{i,1}, \dots, w_{i,4}\}$$

Für den Fall  $\theta_i = 3$  wählen wir schließlich einen Punkt  $w_{i,1} \in T_{i,4} \setminus \overline{v_{i,4}v_{i,1}}$  und setzen  $\mathcal{A}_i := \{w_{i,1}\}$ . Die Abbildung 5.16 zeigt die Interpolationsmengen für die vier Fälle.



Abbildung 5.16: Interpolationsmengen  $\mathcal{A}_i$  für  $S_3^1(\Delta_{FVS})$ 

**Satz 5.13.** *Es seien  $\mathcal{A}_i$  wie oben definiert und  $\mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^N \mathcal{A}_i$ , dann gibt es zu jeder Funktion  $f \in C(\Omega)$  einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in S_3^1(\Delta_{FVS})$  mit  $s(v) = f(v)$ ,  $v \in \mathcal{A}$ .*

**Beweis:** Mit (4.1) und (4.2) erhalten wir für die Anzahl der Interpolationsbedingungen

$$|\mathcal{A}| = 16\Theta_0 + 9\Theta_1 + 5\Theta_2 + \Theta_3 = 3V^\diamond + E^\diamond = \dim S_3^1(\Delta_{FVS})$$

Wie in den vorherigen Abschnitten kann man leicht zeigen, dass für die vier Fälle alle Bernstein-Bézier-Koeffizienten, bis auf die in Abbildung 5.17 mit  $a_1, \dots, a_9$  bezeichneten, durch die Interpolationswerte auf den Kanten und die  $C^1$ -Übergangsbedingungen bestimmt sind.

Im Viereck  $T_1$  liegen drei Interpolationspunkte auf drei inneren Kanten  $\overline{v_{1,j}v_{1,5}}$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Somit liegen zwei Punkte auf zwei kollinearen Kanten. Mit dem gleichen Beweis wie in Satz 5.7 kann man zeigen, dass durch diese Interpolationswerte die Koeffizienten auf diesen beiden Kanten bestimmt sind. Mit dem Funktionswert auf der dritten Kante kann man nun analog wie im Beweis zu Satz 5.7 den letzten Koeffizienten auf dieser Kante berechnen. Der Koeffizient auf der vierten Kante ergibt sich damit aus der  $C^1$ -Bedingung am singulären Eckpunkt  $v_{1,5}$ . Somit verbleiben noch die

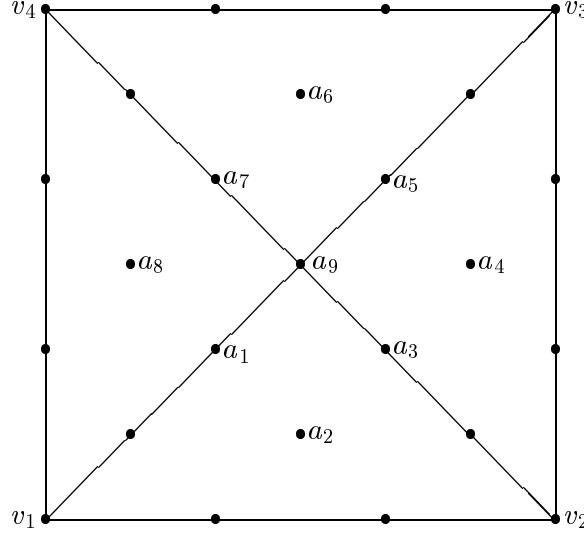


Abbildung 5.17: Bernstein-Bézier-Koeffizienten für ein FVS-Element

Koeffizienten  $a_2$ ,  $a_4$ ,  $a_6$  und  $a_8$ . Nun enthält  $\mathcal{A}$  einen Interpolationspunkt  $w_{1,12}$  im Innern eines Dreiecks  $T_{1,j}$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Wie im Beweis von Satz 5.3 erhält man durch den Funktionswert in  $w_{1,12}$  den zugehörigen Bernstein-Bézier-Koeffizient  $a_{2j}$  im Dreieck  $T_{1,j}$ . Die restlichen drei Koeffizienten ergeben sich nun direkt aus der  $C^1$ -Bedingung über die inneren Kanten von  $Q_1$ .

Für ein Viereck  $T_i$  mit  $\theta_i = 1$  bestimmen sich die Koeffizienten  $a_1$ ,  $a_3$ ,  $a_5$ ,  $a_7$  und  $a_9$  wie im Fall  $\theta_i = 0$ . Da die Kante  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  in der Teilquadrangulierung  $\diamond_{i-1}$  enthalten ist, ergibt sich der Koeffizient  $a_2$  aus der  $C^1$ -Bedingung über diese Kante. Die übrigen Koeffizienten  $a_4$ ,  $a_6$  und  $a_8$  berechnen sich nun wie im ersten Fall.

Für den Fall  $\theta_i = 2$  ergeben sich die Koeffizienten  $a_2$  und  $a_4$  direkt aus den  $C^1$ -Bedingungen über die Kanten  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  und  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$ . Damit ist auch  $a_3$  bestimmt. Nun enthält  $\mathcal{A}$  zwei Interpolationspunkte auf zwei nicht kollinearen Kanten  $\overline{v_{i,j}v_{i,5}}$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Somit gibt es einen Interpolationspunkt auf  $\overline{v_{i,2}v_{i,5}}$  oder  $\overline{v_{i,4}v_{i,5}}$ . Wie im Beweis von Satz 5.7 lassen sich hieraus alle Koeffizienten auf den Kanten  $\overline{v_{i,2}v_{i,5}}$  und  $\overline{v_{i,4}v_{i,5}}$  berechnen. Die übrigen Koeffizienten ergeben sich nun wie im Fall  $\theta_i = 1$ .

Im Fall  $\theta_i = 3$  werden über die  $C^1$ -Bedingung an den äußeren Kanten  $\overline{v_{i,1}v_{i,2}}$ ,  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$  und  $\overline{v_{i,3}v_{i,4}}$ , sowie den inneren Kanten  $\overline{v_{i,2}v_{i,5}}$  und  $\overline{v_{i,3}v_{i,5}}$  alle Koeffizienten bis auf  $a_1$ ,  $a_7$ ,  $a_8$  und  $a_9$  festgelegt. Seien  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  die baryzentrischen Koordinaten von  $w_{i,1}$ , dann gilt  $0 < \lambda_j < 1$ ,  $j = 1, 2, 3$  und wir erhalten aus der Interpolationsbedingung in

$w_{i,1}$  und den  $C^1$ -Bedingungen an den inneren Kanten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3\lambda_2\lambda_3 & 3\lambda_1\lambda_3 & 6\lambda_1\lambda_2 & \lambda_3^2 \\ 1-\mu & 0 & \mu & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 1-\mu \\ 0 & 1-\nu & \nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_7 \\ \gamma_8 \\ \gamma_9 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} v_{i,2} &= \mu v_{i,4} + (1-\mu)v_{i,5} \\ v_{i,3} &= \nu v_{i,1} + (1-\nu)v_{i,5} \end{aligned}$$

Nun gilt  $\mu, \nu < 0$ , so dass wir für den Wert der Determinante

$$-(1-\mu)(6\lambda_1\lambda_2(1-\mu)(1-\nu) - 3\lambda_1\lambda_3\nu(1-\mu) - 3\lambda_2\lambda_3\mu(1-\nu) + \lambda_3^2\mu\nu) < 0$$

erhalten. Also sind die Koeffizienten  $a_1$ ,  $a_7$ ,  $a_8$  und  $a_9$  eindeutig bestimmt.  $\square$

Im zweiten Teil dieses Abschnitts untersuchen wir die Lagrange-Interpolation für unsere Unterteilungsmethode aus Kapitel 4. Hierzu definieren wir zunächst die Interpolationsmengen für die Vierecke  $Q_i$ . Wie bei der Unterteilungsmethode mit Clough-Tochter Elementen wollen wir eine Unterteilung  $\tilde{\Delta}$  mit möglichst wenigen Dreiecken konstruieren. Wir wählen deshalb, im Gegensatz zu dem Interpolanten aus Satz 5.13 keine Nummerierung mit  $\Theta_4 = 0$ . Wie in Kapitel 4 wollen wir aber zur Vereinfachung der Bezeichnungen annehmen, dass  $\Theta_0 = 1$  gilt.

Das Viereck  $Q_1$  wird nun in zwei Dreiecke  $T_{1,1}$  und  $T_{1,2}$  unterteilt. Für  $T_{1,1}$  wählen wir die Interpolationsmenge  $\mathcal{A}_1$  für das Dreieck  $T_1$  und für  $T_{1,2}$  die Interpolationsmenge  $\mathcal{A}_i$  für ein Dreieck  $T_i$  mit  $\theta_i = 1$  des Interpolanten  $s \in S_3^1(\tilde{\Delta})$  aus Satz 5.6.

Für ein Viereck  $Q_i$  mit  $\theta_i \in \{1, 2\}$  müssen wir wieder mehrere Fälle unterscheiden. Gilt  $\theta_i = 1$ , dann sind die beiden Eckpunkte  $v_{i,1}$  und  $v_{i,2}$  bereits in der Teilquadrangulierung  $\diamond_{i-1}$  enthalten. Die beiden anderen Eckpunkte können ebenfalls in der Teilquadrangulierung  $\diamond_{i-1}$  enthalten sein. Dies ist dann der Fall, wenn es in der Quadrangulierung Vierecke  $Q_j$  mit  $\theta_j = 4$  gibt. Wir wählen nun einen Punkt  $w_{i,1}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,2}v_{i,3}}$ , zwei Punkte  $w_{i,2}, w_{i,3}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,3}v_{i,4}}$ , einen Punkt  $w_{i,4}$  auf der Kante  $\overline{v_{i,4}v_{i,1}}$  und setzen

$$\mathcal{A}_i := \begin{cases} \{v_{i,3}, v_{i,4}, w_{i,1}, \dots, w_{i,4}\} & v_{i,3}, v_{i,4} \notin \diamond_{i-1} \\ \{v_{i,3}, w_{i,1}, w_{i,2}\} & v_{i,3} \notin \diamond_{i-1} \text{ und } v_{i,4} \in \diamond_{i-1} \\ \{v_{i,4}, w_{i,3}, w_{i,4}\} & v_{i,3} \in \diamond_{i-1} \text{ und } v_{i,4} \notin \diamond_{i-1} \\ \emptyset & v_{i,3}, v_{i,4} \in \diamond_{i-1} \end{cases}$$

Entsprechend verfahren wir für den Fall  $\theta_i = 2$ . Hier sind die Eckpunkte  $v_{i,1}$ ,  $v_{i,2}$  und  $v_{i,3}$  bereits in der Teilquadrangulierung  $\diamond_{i-1}$  enthalten. Wir können deshalb hier zwei Fälle unterscheiden, je nachdem ob der vierte Eckpunkt  $v_{i,4}$  auch in  $\diamond_{i-1}$  enthalten ist

oder nicht. Wir wählen nun jeweils einen Punkt  $w_{i,1}$  und  $w_{i,2}$  auf den Kanten  $\overline{v_{i,3}v_{i,4}}$  und  $\overline{v_{i,4}v_{i,1}}$ . Zudem werden zwei Punkte  $w_{i,3}$  und  $w_{i,4}$  im Innern von  $Q_i$  ausgewählt, die auf zwei, nicht kollinearen Kanten  $\overline{v_{i,j}v_{i,5}}$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  liegen. Hierfür definieren wir:

$$\mathcal{A}_i := \begin{cases} \{v_{i,4}, w_{i,1}, \dots, w_{i,4}\} & v_{i,4} \notin \diamond_{i-1} \\ \{w_{i,3}, w_{i,4}\} & v_{i,4} \in \diamond_{i-1} \end{cases}$$

Für  $\theta_i \in \{3, 4\}$  müssen wir keine Fallunterscheidung machen, da hier bereits alle vier Eckpunkte von  $Q_i$  in der Teilquadrangulierung  $\diamond_{i-1}$  enthalten sind. Für  $\theta_i = 3$  wählen wir die gleiche Interpolationsmenge wie im Fall  $S_3^1(\Delta_{FVS})$  und für  $\theta_i = 4$  setzen wir  $\mathcal{A}_i = \emptyset$ . Die Abbildung 5.18 zeigt die Interpolationspunkte für ein Viereck  $Q_i$  mit  $\theta_i \leq 3$ .

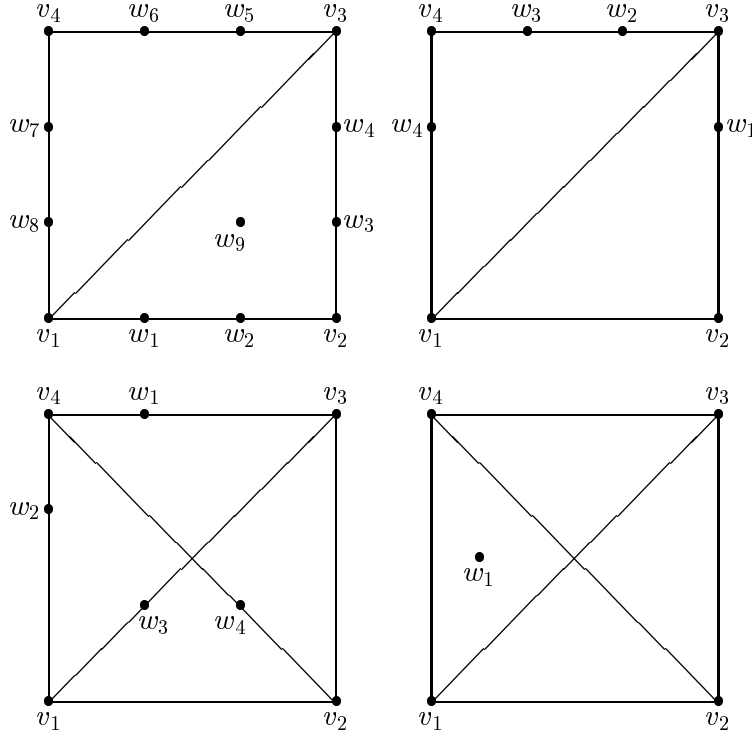


Abbildung 5.18: Interpolationsmengen  $\mathcal{A}_i$  für  $S_3^1(\tilde{\Delta})$

**Satz 5.14.** *Es seien  $\mathcal{A}_i$  wie oben definiert und  $\mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^N \mathcal{A}_i$ , dann gibt es zu jeder Funktion  $f \in C(\Omega)$  einen eindeutig bestimmten Spline  $s \in S_3^1(\tilde{\Delta})$  mit  $s(v) = f(v)$ ,  $v \in \mathcal{A}$ .*

**Beweis:** Aus den obigen Bemerkungen folgt mit Satz 4.17 und (4.2):

$$|\mathcal{A}| = 13\Theta_0 + 6\Theta_1 + 5\Theta_2 - 3\Theta_4 + \Theta_3 = 3V^\circ + 2\Theta_2 + \Theta_3 + 1 = \dim S_3^1(\tilde{\Delta})$$

Somit müssen wir nur zeigen, dass alle Koeffizienten des Interpolanten durch die Interpolationswerte bestimmt sind. Die Fälle  $\theta_i = 0$  und  $\theta_i = 1$  kann man wie in Abschnitt 5.1 und 5.2 beweisen. Gilt  $v_{i,4} \in \diamond_{i-1}$ , dann folgt der Fall  $\theta_i = 2$  aus Satz 5.13. Den Fall  $v_{i,4} \notin \diamond_{i-1}$  zeigt man wie in Satz 5.6. Der Fall  $\theta_i = 3$  folgt wieder aus Satz 5.13 und der Fall  $\theta_i = 4$  aus Satz 4.17.  $\square$

## Kapitel 6

# 3D-Oberflächen

Interpolationsverfahren mit bivariaten Splines über Triangulierungen eignen sich gut zur Darstellung von Oberflächen im Raum. Da der Graph eines bivariaten Splines jedoch eine reellwertige Funktion  $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  beschreibt, können diese Verfahren nicht zur Konstruktion von beliebigen, insbesondere geschlossenen 3D-Oberflächen verwendet werden. Hierzu werden deshalb andere Ansätze benötigt. In den letzten Jahren wurden verschiedene Verfahren für 3D-Oberflächen entwickelt. Für geschlossene, sphärenartige Oberflächen finden sich Methoden mit sphärischen Polynomen. Alfeld, Neamtu und Schumaker [7] haben gezeigt, dass man durch Verwendung von sphärischen Dreiecken die Bernstein-Bézier-Methoden für ebene Dreiecke weitgehend übertragen kann. Insbesondere können Methoden mit finiten Elementen zur Konstruktion solcher Oberflächen verwendet werden (siehe Alfeld, Neamtu und Schumaker [7, 8, 9] und Liu und Schumaker [103]). Diese Verfahren eignen sich jedoch nur für sphärenartige Oberflächen. Komplexe Objekte lassen sich hiermit nicht darstellen. Eine andere Methode sind Subdivision-Verfahren (siehe Dyn, Gregory und Levin [58, 59], Dyn und Levin [60], Kobbelt [89], Reif [123] und Shenkman, Dyn und Levin [134]). Bei diesen Verfahren wird eine lineare Dreiecksfläche im Raum durch Unterteilung schrittweise verfeinert und geglättet. Es wird eine Folge von Dreiecksflächen berechnet, die gegen eine differenzierbare Funktion konvergiert. Neben solchen Unterteilungsverfahren finden sich auch Verfahren mit Bézier-Patches und Bézier-Polynomen (siehe Boehm, Farin und Kahmann [21], Dierckx [54], Farin [64, 65], Hahmann und Bonneau [79], Loop [104], Piper [120], Worsay und Farin [143] und Ye, Liang und Nowacki [144]). Sie verwenden Übergangsbedingungen an den Kanten zweier Bézier-Patches zur Glättung der Oberfläche. Bajaj, Bernardini und Xu [16, 17] und Bernardini, Bajaj, Chen und Schikore [19] beschreiben Verfahren zur Rekonstruktion von 3D-Objekten aus Datenpunkten. Sie berechnen zunächst durch ein Approximationsverfahren eine stetige 3D-Oberfläche, die anschließend geglättet wird. Alle diese Verfahren benutzen jedoch zur Glättung nur die Information der linearen Dreiecksfläche und erreichen deshalb nur eine geringe Approximationsgüte.

Wir beschreiben in diesem Kapitel eine neue Methode, mit der wir glatte Splineoberflächen durch Interpolation konstruieren. Dieses Verfahren haben wir zusammen mit Nürnberger entwickelt. Es zeichnet sich durch eine hohe Approximationsgüte aus und kann zur Konstruktion von beliebigen Oberflächen eingesetzt werden. Bei diesem Verfahren wird eine Spline über einer Dreiecksoberfläche im Raum berechnet. Die Dreiecksoberfläche ist somit das Grundgebiet, auf dem der Spline definiert wird. Die Berechnung des Interpolanten erfolgt in zwei Stufen. Zunächst bestimmen wir durch ein Lagrange-Interpolationsverfahren einen stetigen Spline. Im zweiten Schritt verwenden wir das Bernstein-Bézier-Netz des stetigen Interpolanten und glätten die Oberfläche, indem wir die Bernstein-Bézier-Koeffizienten in geeignete Tangentialebenen projizieren. Dieses Verfahren entspricht den bekannten  $C^1$ -Übergangsbedingungen für Splines auf ebenen Triangulierungen und sichert ein gutes Approximationsverhalten unseres Interpolanten.

Wir behandeln unser Verfahren ausführlich für die klassische Unterteilung nach Clough-Tocher. Es kann aber auch auf andere Unterteilungsmethoden angewendet werden, insbesondere auch auf unsere Methode aus Kapitel 3. Im folgenden Abschnitt beschreiben wir zunächst die Bernstein-Bézier-Darstellung für Polynome im Raum. Anschließend wird das Interpolationsverfahren dargestellt und das Approximationsverhalten untersucht. Der letzte Teil zeigt eine Anwendung unseres Verfahrens zur Datenreduktion bei der Darstellung von 3D-Objekten.

## 6.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Bernstein-Bézier-Darstellung für Polynome im Raum. Gegeben sei eine Triangulierung  $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$  im Raum mit den Eckpunkten  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_V\}$ . Weiter bezeichnen wir mit

$$\Omega := \bigcup_{i=1}^N T_i$$

die zugehörige Dreiecksoberfläche. Für ein Dreieck  $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$  sei  $p : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  in jeder Komponente ein Polynom vom Grad  $d$ , d. h. es gilt:

$$p(v) = \begin{pmatrix} p_1(v) \\ p_2(v) \\ p_3(v) \end{pmatrix}$$

mit  $p_i \in \tilde{\Pi}_d$ . Da alle Punkte  $v \in T$  in einer Ebene liegen, können wir  $v$  durch eindeutig bestimmte baryzentrische Koordinaten  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  beschreiben. Wir definieren deshalb

$$\tilde{p}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = p(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) = p(v)$$

Für den Vektor  $r_2 = v_2 - v_1$  entlang der Kante  $\overline{v_1 v_2}$  berechnen wir nun den Tangentenvektor  $p_{r_2}$  in  $v_1$ . Sei

$$\tilde{r}_2 := \frac{r_2}{\|r_2\|}$$

dann erhalten wir:

$$p_{\tilde{r}_2}(v_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(v_1 + h\tilde{r}_2) - p(v_1)}{h} = \frac{1}{\|r_2\|} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\tilde{p}(\lambda, 1 - \lambda, 0) - \tilde{p}(1, 0, 0)}{1 - \lambda}$$

Ist  $\tilde{p} = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha B_\alpha^d$  die Bernstein-Bézier-Darstellung von  $p$ , dann folgt:

$$\begin{aligned} \|r_2\| p_{\tilde{r}_2}(v_1) &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\sum_{i=0}^d c_{i,d-i,0} \binom{d}{i} \lambda^i (1-\lambda)^{d-i} - c_{d,0,0}}{1-\lambda} \\ &= c_{d,0,0} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\lambda^d - 1}{1-\lambda} + \sum_{i=0}^{d-1} c_{i,d-i,0} \binom{d}{i} \lambda^i (1-\lambda)^{d-i} \\ &= d(c_{d-1,1,0} - c_{d,0,0}) \end{aligned}$$

Definieren wir  $p_{r_2} := \|r_2\| p_{\tilde{r}_2}$ , dann gilt analog zu Satz 2.3 die Beziehung:

$$p_{r_2}(v_1) = d(c_{d-1,1,0} - c_{d,0,0})$$

Entsprechend folgt für  $r_3 = v_3 - v_1$ :

$$p_{r_3}(v_1) = d(c_{d-1,0,1} - c_{d,0,0})$$

Wir erhalten hieraus die folgende Aussage (siehe auch Farin [65]).

**Lemma 6.1.** *Sei  $\Delta := \{T_1, \dots, T_N\}$  eine Triangulierung im Raum und  $v_i$  ein Eckpunkt mit den angrenzenden Dreiecken  $T_{i_1}, \dots, T_{i_n}$ . Dann ist ein Spline  $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  genau dann im Eckpunkt  $v_i$  differenzierbar, wenn die Bernstein-Bézier-Koeffizienten  $c_\alpha^{ij}$  im Ring  $D_1(v_i)$  in einer Ebene liegen.*

Für die Kanten der Triangulierung  $\Delta$  übertragen wir die, für ebene Triangulierungen bekannte  $C^1$ -Bedingung. Seien  $T_{i_1}$  und  $T_{i_2}$  zwei Dreiecke mit einer gemeinsamen Kante und  $c_{210}^{ij}$ ,  $c_{120}^{ij}$  und  $c_{111}^{ij}$ ,  $j = 1, 2$  die Bernstein-Bézier-Koeffizienten an der Kante (siehe Abbildung 6.2), dann fordern wir für unseren Spline-Interpolanten, dass diese Koeffizienten in einer Ebene liegen.

## 6.2 Konstruktion von 3D-Oberflächen

In diesem Abschnitt beschreiben wir unser Interpolationsverfahren für 3D-Oberflächen. Dieses Verfahren besteht aus zwei Stufen. Zunächst wird eine stetige-kubische



Splineoberfläche durch Lagrange-Interpolation bestimmt. Anschließend wird der Spline geglättet, indem wir die Bernstein-Bézier-Koeffizienten des stetigen Interpolanten in geeignete Tangentialebenen projizieren. Hierdurch sichern wir Bedingungen an die Bernstein-Bézier-Koeffizienten, die den bekannten  $C^1$ -Übergangsbedingungen für Splines auf ebenen Triangulierungen entsprechen.

Im Folgenden sei  $\Omega_f$  eine 3D-Oberfläche. Diese kann als Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  oder, wie im vierten Abschnitt, als stückweise lineare Dreiecksfläche gegeben sein. Für praktische Anwendungen ist vor allem der zweite Fall interessant. Mit  $\Omega$  bezeichnen wir wieder die Dreiecksfläche, auf der Spline definiert ist. Die zugehörige Triangulierung sei  $\Delta$ . Durch Lagrange-Interpolation in zehn Punkten auf jedem Dreieck können wir einen kubischen Spline  $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  berechnen. Hierzu wählen wir auf dem Dreieck  $T_i = \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}) \in \Delta$  die Punkte

$$p_{i,\alpha} = \frac{\alpha_1 v_{i,1} + \alpha_2 v_{i,2} + \alpha_3 v_{i,3}}{3}, \quad |\alpha| = 3$$

Für vorgegebene Werte  $f_{i,\alpha} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $|\alpha| = 3$  ist dann der Spline  $s$  eindeutig durch die Interpolationsbedingung:

$$s(p_{i,\alpha}) = f_{i,\alpha}$$

bestimmt. Ist  $f$  als Funktion gegeben, dann erhalten wir die Interpolationswerte durch  $f_{i,\alpha} = f(p_{i,\alpha})$ . Für eine Dreiecksfläche  $\Omega_f$  wählen wir die Punkte  $f_{i,\alpha}$  mit dem kürzesten Abstand zu  $\Omega$ .

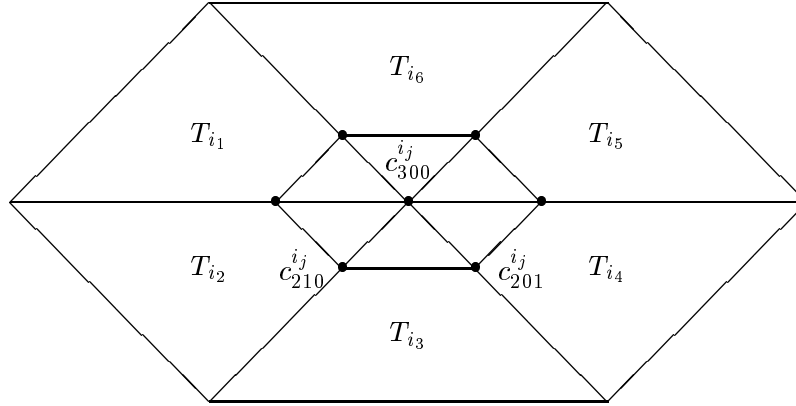
Im zweiten Schritt wird aus dem Bernstein-Bézier-Netz von  $s$  ein Spline berechnet, der in jedem Eckpunkt von  $\Delta$  differenzierbar ist. Hierzu werden die Bernstein-Bézier-Koeffizienten in geeignete Ebenen projiziert. Diese Ebenen berechnen wir durch Mittelung der orthogonalen Vektoren auf den Tangentialebenen von  $s$ .

Hierzu betrachten wir zunächst einen Eckpunkt  $v_i$  von  $\Delta$ . Die angrenzenden Dreiecke seien  $T_{i_1}, \dots, T_{i_n}$  und die Bernstein-Bézier-Koeffizienten im Ring  $D_1(v_i)$  mit  $c_{300}^{ij}$ ,  $c_{210}^{ij}$  und  $c_{201}^{ij}$  bezeichnet. Die Abbildung 6.1 zeigt die Zelle um  $v_i$  mit den Bernstein-Bézier-Koeffizienten. Durch die Koeffizienten  $c_{300}^{ij}$ ,  $c_{210}^{ij}$  und  $c_{201}^{ij}$  wird nun eine Ebene im Raum aufgespannt. Sei  $n_{i_j}$  der Normalenvektor auf der Ebene, dann erhalten wir den gemittelten Vektor durch

$$n_{v_i} = \sum_{j=1}^n \frac{n_{i_j}}{n}$$

Die Koeffizienten  $c_{210}^{ij}$  und  $c_{201}^{ij}$  projizieren wir nun in die Ebene durch  $v_i$  und orthogonal zu  $n_{v_i}$ . Die neuen Koeffizienten  $\tilde{c}_{210}^{ij}$  und  $\tilde{c}_{201}^{ij}$  ergeben sich durch:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{210}^{ij} &= c_{210}^{ij} - \langle c_{210}^{ij} - c_{300}^{ij}, n_{v_i} \rangle n_{v_i} \\ \tilde{c}_{201}^{ij} &= c_{201}^{ij} - \langle c_{201}^{ij} - c_{300}^{ij}, n_{v_i} \rangle n_{v_i} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Abbildung 6.1: Eckpunkt  $v_i$  mit Zelle  $\Delta_{v_i}$ 

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  das übliche Skalarprodukt

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

bezeichnet. Für alle übrigen Koeffizienten setzen wir  $\tilde{c}_\alpha^{ij} = c_\alpha^{ij}$ . Nach Lemma 6.1 definiert das Bernstein-Bézier-Netz  $\{\tilde{c}_\alpha^i : i = 1, \dots, N; |\alpha| = 3\}$  einen Spline  $\tilde{s} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , der in allen Eckpunkten von  $\Delta$  differenzierbar ist.

Ebenso verfahren wir nun an den Kanten von  $\Delta$ . Für jede innere Kante  $e_i$  berechnen wir einen gemittelten Normalenvektor  $n_{e_i}$ . Seien  $T_{i_1}$  und  $T_{i_2}$  zwei Dreiecke mit gemeinsamer Kante  $e_i$  und  $\tilde{c}_{210}^{ij}$ ,  $\tilde{c}_{120}^{ij}$  und  $\tilde{c}_{111}^{ij}$ ,  $j = 1, 2$  die Bernstein-Bézier-Koeffizienten an der Kante (siehe Abbildung 6.2), dann wird durch die drei Koeffizienten eine Ebene im  $\mathbb{R}^3$  aufgespannt. Seien  $n_{i_1}$  und  $n_{i_2}$  die Normalenvektoren der beiden Ebenen, dann setzen wir:

$$n_{e_i} = \frac{n_{i_1} + n_{i_2}}{2}$$

Offensichtlich ist der Vektor  $n_{e_i}$  orthogonal zur Gerade durch die beiden Koeffizienten  $\tilde{c}_{210}^{ij}$  und  $\tilde{c}_{120}^{ij}$ . Im folgenden Schritt werden deshalb nur noch die mittleren Koeffizienten  $\tilde{c}_{111}^{ij}$  geändert. Da wir dies aber nicht für alle drei Kanten eines Dreiecks unabhängig voneinander durchführen können, müssen wir eine Unterteilung der Dreiecke vornehmen. Wir wählen hier die Unterteilung nach Clough-Tocher, bei der jedes Dreieck in drei Mikro-Dreiecke unterteilt wird. Wie in Kapitel 3 bezeichnen wir für ein Dreieck  $T_i := \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$  die Mikro-Dreiecke mit

$$T_{i,1} := \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,4})$$

$$T_{i,2} := \Delta(v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4})$$

$$T_{i,3} := \Delta(v_{i,3}, v_{i,1}, v_{i,4})$$

wobei  $v_{i,4}$  das Baryzentrum von  $T_i$  ist. Damit erhalten wir nun die Triangulierung:

$$\Delta_{CT} := \{T_{i,j} : i = 1, \dots, N; j = 1, 2, 3\}$$

Wir berechnen das Bernstein-Bézier-Netz eines Splines  $s_1$  auf der Triangulierung  $\Delta_{CT}$ , so dass  $s_1(x) = \tilde{s}(x)$  für alle  $x \in \Omega$  gilt. Die zugehörigen Bernstein-Bézier-Koeffizienten bezeichnen wir mit  $c_\alpha^{i,j}$ . Es ist zu beachten, dass die Koeffizienten  $c_\alpha^{i,j}$  auf den Kanten von  $\Delta$  mit den Koeffizienten  $\tilde{c}_\alpha^i$  des Splines  $\tilde{s}$  übereinstimmen. Die Koeffizienten im Ring  $D_1(v)$  eines Eckpunktes  $v$  von  $\Delta$  liegen deshalb nach Konstruktion in einer Ebene.

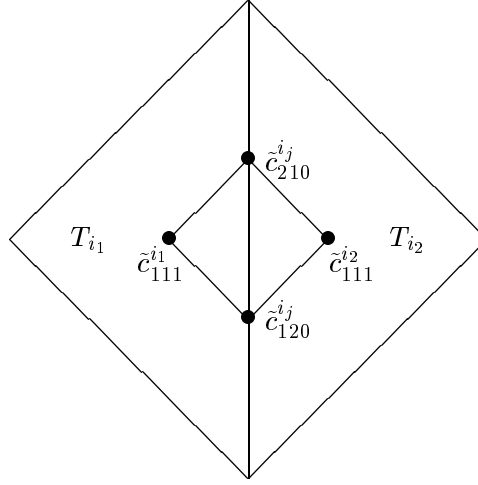


Abbildung 6.2: Kante  $e_i$  mit angrenzenden Dreiecken

Der mittlere Koeffizient  $c_{111}^{i,1}$  wird nun in die Ebene durch die Koeffizienten  $c_{210}^{i,1}$  und  $c_{120}^{i,1}$  und senkrecht zum Vektor  $n_{e_{i,1}}$  der Kante  $e_{i,1} = \overline{v_{i,1}v_{i,2}}$  projiziert. Analog zu Gleichung (6.1) gilt:

$$\tilde{c}_{111}^{i,1} = c_{111}^{i,1} - \langle c_{111}^{i,1} - c_{210}^{i,1}, n_{e_{i,1}} \rangle n_{e_{i,1}} \quad (6.2)$$

Entsprechend berechnen sich  $\tilde{c}_{111}^{i,2}$  und  $\tilde{c}_{111}^{i,3}$ . Für die übrigen Koeffizienten verwenden wir die bekannten  $C^1$ -Übergangsbedingungen der Clough-Tocher Unterteilung für ebene Triangulierungen. Es gilt somit für  $j = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{021}^{i,j-1} &= \tilde{c}_{201}^{i,j} = \frac{\tilde{c}_{300}^{i,j} + \tilde{c}_{210}^{i,j} + \tilde{c}_{021}^{i,j-1}}{3} \\ \tilde{c}_{012}^{i,j-1} &= \tilde{c}_{102}^{i,j} = \frac{\tilde{c}_{201}^{i,j} + \tilde{c}_{111}^{i,j} + \tilde{c}_{111}^{i,j-1}}{3} \\ \tilde{c}_{003}^{i,j} &= \frac{\tilde{c}_{102}^{i,1} + \tilde{c}_{102}^{i,2} + \tilde{c}_{102}^{i,3}}{3} \end{aligned}$$

Das Bernstein-Bézier-Netz zu den Koeffizienten  $\tilde{c}_\alpha^{i,j}$  definiert nun unseren kubischen Interpolanten  $\tilde{s}_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Da die Bernstein-Bézier-Koeffizienten  $\tilde{c}_\alpha^{i,j}$  im Ring  $D_1(v)$  eines Eckpunktes  $v \in \Delta$  in einer Ebene liegen, erhalten wir mit Lemma 6.1 den folgenden Satz.

**Satz 6.2.** *Sei  $\Delta := \{T_1, \dots, T_N\}$  eine Triangulierung im Raum und  $\tilde{s}_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  der, nach dem oben beschriebenen Verfahren konstruierte Spline. Dann ist  $\tilde{s}_1$  in jedem Eckpunkt  $v$  von  $\Delta$  differenzierbar.*

### 6.3 Approximationsgüte

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Approximationsverhalten des Interpolanten  $\tilde{s}_1$ . Hierzu betrachten wir das folgende Modell: Gegeben ist ein Polygon  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  und eine Triangulierung  $\Delta$  von  $\Omega$ . Für eine Funktion  $f \in C^4(\Omega)$  berechnen wir den Interpolanten  $\tilde{s}_1$  nach unserem Verfahren. Für den Lagrange-Interpolanten  $s$  gilt nach Ciarlet [44] das folgende Lemma:

**Lemma 6.3.** *Sei  $f \in C^4(\Omega)$  und  $s$  der Lagrange-Interpolant in den Punkten  $P_{i,\alpha}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $|\alpha| = 3$ , dann gibt es eine Konstante  $A_f$ , die nur von  $f$  abhängt, so dass*

$$\begin{aligned} \|f - s\| &\leq A_f h^4 \\ \|D_x f - D_x s\| &\leq A_f h^3 \\ \|D_y f - D_y s\| &\leq A_f h^3 \end{aligned}$$

*gilt. Hierbei bezeichnen  $D_x$  und  $D_y$  die partiellen Ableitungen nach  $x$  und  $y$ .*

Der Normalenvektor einer Funktion  $g \in C^1(\Omega)$  im Punkt  $v$  erhalten wir durch

$$n_g(v) = \frac{1}{\sqrt{D_x^2 g(v) + D_y^2 g(v) + 1}} \begin{pmatrix} D_x g(v) \\ D_y g(v) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit dem folgenden Lemma erhalten wir eine Abschätzung für die Normalenvektoren.

**Lemma 6.4.** *Es seien  $v_1 := (x_1, y_1, 1)$ ,  $v_2 := (x_2, y_2, 1)$  und  $k \in \mathbb{N}$ , so dass*

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &\leq A h^k \\ |y_1 - y_2| &\leq A h^k \end{aligned}$$

*mit  $A \in \mathbb{R}$  gilt. Dann gibt es eine Konstante  $B \in \mathbb{R}$ , die nur von  $x_1, x_2, y_1, y_2$  abhängt, so dass gilt*

$$\left\| \frac{v_1}{\|v_1\|} - \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\| \leq B h^k$$

**Beweis:** Wir erhalten

$$\left\| \frac{v_1}{\|v_1\|} - \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\| = \frac{\| \|v_2\| v_1 - \|v_1\| v_2 \|}{\|v_1\| \|v_2\|} \leq \frac{\| \|v_1\| - \|v_2\| \|}{\|v_2\|} + \frac{\|v_1 - v_2\|}{\|v_2\|}$$

Nun gilt

$$\| \|v_1\| - \|v_2\| \| = \left| \sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{1 + x_2^2 + y_2^2} \right| \leq \frac{|(x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2)|}{2}$$

so dass

$$\left\| \frac{v_1}{\|v_1\|} - \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\| \leq \frac{|(x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2)|}{2 \|v_2\|} + \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\|v_2\|} \leq B h^k$$

folgt, mit der Konstante

$$B := \left( \frac{|x_1 + x_2|}{2} + \frac{|y_1 + y_2|}{2} + \sqrt{2} \right) A$$

□

Ist nun  $v_i$  ein Eckpunkt von  $\Delta$ ,  $T_{i_1}, \dots, T_{i_n}$  die Dreiecke mit Eckpunkt  $v_i$  und  $p_{i_j} := s|_{T_{i_j}}$ , dann folgt aus Lemma 6.3 und 6.4

$$\left\| n_{p_{i_j}}(v_i) - n_{p_{i_k}}(v_i) \right\| \leq \left\| n_{p_{i_j}}(v_i) - n_f(v_i) \right\| + \left\| n_{p_{i_k}}(v_i) - n_f(v_i) \right\| \leq B_f h^3 \quad (6.3)$$

mit einer Konstante  $B_f \in \mathbb{R}$ , die nur von  $f$  abhängt. Analog folgt für eine innere Kante  $e_i$  von  $\Delta$  mit den angrenzenden Dreiecken  $T_{i_1}$  und  $T_{i_2}$ :

$$\left\| n_{p_{i_1}}(v) - n_{p_{i_2}}(v) \right\| \leq C_f h^3 \quad (6.4)$$

wobei  $p_{i_j} := s|_{T_{i_j}}$ ,  $j = 1, 2$  und  $v \in e_i$  gilt. Hierbei bezeichnet  $C_f \in \mathbb{R}$  eine Konstante, die nur von  $f$  abhängt. Zur Herleitung des Approximationsfehlers  $\|\tilde{s} - s\|$  und  $\|\tilde{s}_1 - s_1\|$  benötigen wir noch die folgende Aussage über die Koeffizienten eines Bernstein-Bézier-Polynoms.

**Lemma 6.5.** *Sei  $p : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Polynom in der Bernstein-Bézier-Darstellung*

$$p(v) = \sum_{|\alpha|=3} c_\alpha B_\alpha^3(v)$$

dann gibt es eine Konstante  $K_p \in \mathbb{R}$ , die nur von  $p$  abhängt, so dass gilt:

$$\max \{ \|c_\alpha - c_\beta\| : |\alpha| = |\beta| = 3 \} \leq K_p h$$

**Beweis:** Sei  $p_i(v) := \sum_{|\alpha|=3} c_\alpha^i B_\alpha^3(v)$ ,  $i = 1, 2, 3$  und  $c_\gamma^i := \min \{c_\alpha^i : |\alpha| = 3\}$ , dann gilt für alle  $v \in T$ :

$$0 \leq p_i(v) - c_\gamma^i \leq \|p_i\|_1 h$$

Hierbei definieren wir  $\|\cdot\|_j : C^j(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  wie in Kapitel 3 durch

$$\|f\|_j := \sup \{ \|D_x^\nu D_y^\mu f\| : \nu + \mu = j \}$$

Für  $|\beta| = 3$  und  $v \in T$  erhalten wir somit:

$$\|p_i\|_1 h \geq \sum_{|\alpha|=3} (c_\alpha^i - c_\gamma^i) B_\alpha^3(v) \geq (c_\beta^i - c_\gamma^i) B_\beta^3(v)$$

Wegen  $\|B_\beta^3\| \geq \frac{2}{9}$  folgt:

$$\max \{ |c_\alpha^i - c_\beta^i| : |\alpha| = |\beta| = 3 \} \leq \frac{9}{2} h \|p_i\|_1$$

□

Hiermit erhalten wir nun die beiden folgenden Aussagen.

**Lemma 6.6.** *Sei  $f \in C^4(\Omega)$ ,  $s$  und  $\tilde{s}$  die Interpolanten aus Abschnitt 6.2. Dann gibt es eine Konstante  $D_f$ , die nur von  $f$  abhängt, so dass gilt:*

$$\|\tilde{s} - s\| \leq D_f h^4$$

**Beweis:** Sei  $T_i := \Delta(v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})$  ein Dreieck,  $p_i := s|_{T_i}$  und  $\tilde{p}_i := \tilde{s}|_{T_i}$ , sowie  $c_\alpha^i, \tilde{c}_\alpha^i$  die Bernstein-Bézier-Koeffizienten von  $p_i, \tilde{p}_i$ . Aus Satz 2.3 und Gleichung (6.1) folgt:

$$\begin{aligned} \|\tilde{c}_{210}^i - c_{210}^i\| &= |\langle c_{210}^i - c_{300}^i, n_{v_{i,1}} \rangle| \\ &= |\langle c_{210}^i - c_{300}^i, n_{p_i}(v_{i,1}) \rangle + \langle c_{210}^i - c_{300}^i, n_{v_{i,1}} - n_{p_i}(v_{i,1}) \rangle| \\ &\leq \|c_{210}^i - c_{300}^i\| \|n_{v_{i,1}} - n_{p_i}(v_{i,1})\| \\ &\leq 2 \|c_{210}^i - c_{300}^i\| \max \left\{ \|n_{p_{i_j}}(v_{i,1}) - n_{p_{i_k}}(v_{i,1})\| : j, k = 1, \dots, n \right\} \end{aligned}$$

wobei  $p_{i_1}, \dots, p_{i_n}$  die Polynomstücke im Eckpunkt  $v_{i,1}$  bezeichnen. Nach Lemma 6.5 gibt es eine Konstante  $K_{p_i}$ , die nur von  $p_i$  abhängt, so dass

$$\max \{ \|c_\alpha^i - c_\beta^i\| : |\alpha| = |\beta| = 3 \} \leq K_{p_i} h$$

gilt. Mit Gleichung (6.3) erhalten wir:

$$\|\tilde{c}_{210}^i - c_{210}^i\| \leq 2B_f h^3 \max \{ \|c_\alpha^i - c_\beta^i\| : |\alpha| = |\beta| = 3 \} \leq D_f h^4$$

mit  $D_f := 2B_f \max \{ K_{p_i} : i = 1, \dots, N \}$ . Analog zeigt man dies für die übrigen Koeffizienten. Somit folgt:

$$\|\tilde{s} - s\| \leq \max \{ \|\tilde{p}_i - p_i\|, i = 1, \dots, N \} \leq D_f h^4$$

□

Analog folgt aus Satz 2.4 und Gleichung (6.2) das folgende Lemma für  $s_1$  und  $\tilde{s}_1$ .

**Lemma 6.7.** *Sei  $f \in C^4(\Omega)$  und  $s_1, \tilde{s}_1$  die Interpolanten aus Abschnitt 6.2. Dann gibt es eine Konstante  $E_f$ , die nur von  $f$  abhängt, so dass gilt:*

$$\|\tilde{s}_1 - s_1\| \leq E_f h^4$$

Damit erhalten wir nun den wichtigen Satz über die Approximationsgüte des Interpolanten  $\tilde{s}_1$ .

**Satz 6.8.** *Sei  $f \in C^4(\Omega)$ ,  $\tilde{s}_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  der eindeutige Spline-Interpolant aus Abschnitt 6.2 und  $h$  die maximale Kantenlänge von  $\Delta$ , dann gibt es eine Konstante  $K_f$  mit*

$$\|f - \tilde{s}_1\| \leq K_f h^4$$

**Beweis:** Aus Lemma 6.3, 6.6 und 6.7 folgt

$$\|f - \tilde{s}_1\| \leq \|f - s\| + \|s - \tilde{s}\| + \|s_1 - \tilde{s}_1\| \leq K_f h^4$$

mit  $K_f := A_f + D_f + E_f$ . □

## 6.4 Datenreduktion

Derzeit werden 3D-Objekte in graphischen Anwendungen meist durch Dreiecksflächen dargestellt. Zur Rekonstruktion von komplexen 3D-Objekten werden oft mehr als 100.000 Dreiecke benötigt. Ein solches Objekt zeigt das linke Bild in Abbildung 6.3. Dieser Kopf besteht beispielsweise aus 640.000 Dreiecken. Dreiecksflächen erfordern somit hohen Speicheraufwand und Rechenleistung. Die Verwendung unserer Interpolationsmethode kann hier wirksam zur Datenreduktion eingesetzt werden.

Allgemein können wir die Problemstellung wie folgt beschreiben: Gegeben ist ein 3D-Objekt  $\Omega_f$  in Form einer Dreiecksfläche. Dieses Objekt wird zu einer Dreiecksfläche  $\Omega$  reduziert. Verfahren zur Reduktion von Triangulierungen finden sich beispielsweise bei Garland und Heckbert [72], Guéziec [77], Hoppe [82, 83], Hoppe, DeRose, Duchamp, McDonald und Stuetzle [84], Kalvin und Taylor [88] und Schroeder, Zarge und Lorensen [127]. Auf der Triangulierung  $\Omega$  berechnen wir nun unseren Interpolanten  $\tilde{s}_1$  aus Abschnitt 6.2. Wir wählen hier als Interpolationswert  $f_{i,\alpha}$  den Punkt auf  $\Omega_f$  mit dem kürzesten Abstand zum Interpolationspunkt  $p_{i,\alpha} \in \Omega$ , d. h. es gilt:

$$\|p_{i,\alpha} - f_{i,\alpha}\| = d(p_{i,\alpha}, \Omega_f)$$

Dieses Verfahren haben wir für eine Oberfläche  $\Omega_f$  mit 320.000 Eckpunkten getestet. Die reduzierte Oberfläche  $\Omega$  besteht aus 10.000 Eckpunkten, so dass wir zur Berechnung des Interpolanten 90.000 Interpolationspunkte benötigen. Die Datenreduktion beträgt



Abbildung 6.3: Dreiecksfläche  $\Omega_f$  und Spline-Interpolant  $\tilde{s}_1$

somit vier. Die Berechnungszeit für den Splineinterpolanten beträgt wenige Minuten. Die Abbildung 6.3 zeigt die Oberflächen  $\Omega_f$  (linkes Bild) und den Interpolanten  $\tilde{s}_1$  für die Clough-Tocher Unterteilung aus Abschnitt 6.2 (rechtes Bild). Das Beispiel zeigt, dass unser Interpolationsverfahren komplexe 3D-Objekte effizient und detailgetreu rekonstruieren kann.



## Kapitel 7

# Numerische Ergebnisse

Dieses Kapitel enthält numerische Beispiele zu unseren Interpolationsverfahren aus den vorherigen Kapiteln. Wir testen hier unsere Hermite- und Lagrange-Interpolationsverfahren und vergleichen diese mit Interpolationsverfahren mit Makro-Elementen. Zum Testen der Approximationsordnung haben wir die Flächen der Dreiecke schrittweise verringert. Hierdurch konnten wir gleichmäßige Triangulierungen erzeugen. Bis auf die beiden quadratischen Interpolanten wurden alle Verfahren auf Delaunay-Triangulierungen aus zufällig verteilten Punkten berechnet. Tabelle 7.1 zeigt die Parameter der verwendeten Delaunay-Triangulierungen. Hierbei bezeichnet  $N$  die Anzahl der Dreiecke und  $V_I$  die Anzahl der inneren Eckpunkte vor der Unterteilung. Die beiden folgenden Spalten zeigen die Anzahl  $\Theta$  der Clough-Tocher Elemente und die Länge  $k$  der längsten Kette von Dreiecken mit  $\theta_i = 1$  für die Unterteilung nach Algorithmus 3.23. Die letzte Spalte enthält die maximale Kantenlänge  $h_i$  der Triangulierung.

$i$	$N$	$V_I$	$\Theta$	$k$	$h_i$
1	20	5	3	8	$5.00 \cdot 10^{-1}$
2	53	19	12	11	$3.16 \cdot 10^{-1}$
3	159	64	39	22	$2.06 \cdot 10^{-1}$
4	514	226	133	27	$1.06 \cdot 10^{-1}$
5	1568	725	411	61	$6.99 \cdot 10^{-2}$
6	5160	2474	1393	99	$3.63 \cdot 10^{-2}$
7	15540	7599	4231	231	$2.15 \cdot 10^{-2}$
8	51620	25521	14223	319	$1.17 \cdot 10^{-2}$
9	155232	77105	42801	524	$7.04 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 7.1: Parameter der Triangulierungen

Für die beiden quadratischen Verfahren haben wir gleichmäßige  $\Delta^1$ -Triangulierungen

verwendet. In allen Beispielen wurde Franke's Testfunktion [68]

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{3}{4} \exp \left( -\frac{(9x-2)^2 + (9y-2)^2}{4} \right) + \frac{3}{4} \exp \left( -\frac{(9x+1)^2}{49} - \frac{9y+1}{10} \right) \\ & + \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{(9x-7)^2 + (9y-3)^2}{4} \right) - \frac{1}{5} \exp \left( -(9x-4)^2 - (9y-7)^2 \right) \end{aligned}$$

auf dem Rechteck  $\Omega := [0, 1] \times [0, 1]$  interpoliert.

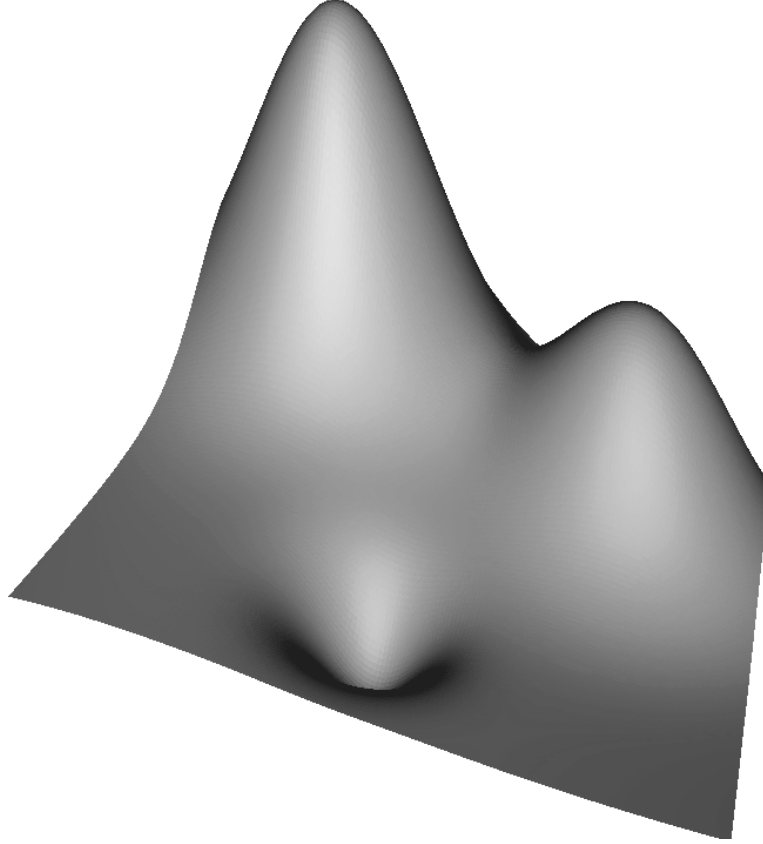


Abbildung 7.1: Franke's Testfunktion

Im Folgenden bezeichnen wir mit  $s_i$  den Interpolanten auf der Triangulierung  $\Delta_i$ . Weiter sei

$$\epsilon_i := \|f - s_i\|_\infty$$

der absolute Interpolationsfehler und

$$\delta_i := \frac{\log \epsilon_i - \log \epsilon_{i+1}}{\log h_i - \log h_{i+1}}$$

der Decay-Exponent von  $\Delta_i$  und  $\Delta_{i+1}$ .

## 7.1 Hermite-Interpolation

Dieser Abschnitt enthält die Ergebnisse zu den Interpolanten aus Kapitel 3. Wir testen hier den Interpolanten aus Satz 3.6 für  $C^1$ - und  $C^2$ -Splines. Die Tabellen 7.2 und 7.3 zeigen die Ergebnisse für die Interpolationsverfahren. Zum Vergleich haben wir auch die Ergebnisse für die Interpolationsverfahren von Laghchim-Lahlou und Sablonnière [90] aufgeführt. Hierbei bezeichnet  $\tilde{\Delta}$  wieder die Triangulierung für unsere Unterteilungsmethode und  $\Delta_{CT}$  die Unterteilung aller Dreiecke nach Clough-Tocher. Die Tabelle enthält jeweils die Anzahl der Interpolationsbedingungen, den absoluten Interpolationsfehler und den Decay-Exponenten.

$i$	$S_3^1(\tilde{\Delta})$			$S_3^1(\Delta_{CT})$		
	dim	$\epsilon_i$	$\delta_i$	dim	$\epsilon_i$	$\delta_i$
1	53	$1.86 \cdot 10^{-1}$	2.54	87	$1.78 \cdot 10^{-1}$	2.95
2	114	$5.78 \cdot 10^{-2}$	4.15	196	$4.58 \cdot 10^{-2}$	3.77
3	306	$9.82 \cdot 10^{-3}$	1.81	546	$9.15 \cdot 10^{-3}$	1.75
4	911	$2.95 \cdot 10^{-3}$	4.50	1673	$2.85 \cdot 10^{-3}$	5.42
5	2633	$4.56 \cdot 10^{-4}$	3.32	4947	$3.02 \cdot 10^{-4}$	3.18
6	8377	$5.16 \cdot 10^{-5}$	2.85	15911	$3.74 \cdot 10^{-5}$	3.78
7	24693	$1.15 \cdot 10^{-5}$	3.22	47311	$5.13 \cdot 10^{-6}$	3.76
8	81229	$1.63 \cdot 10^{-6}$	4.13	156023	$5.21 \cdot 10^{-7}$	3.98
9	242885	$2.01 \cdot 10^{-7}$		467747	$6.93 \cdot 10^{-8}$	

Tabelle 7.2: Hermite-Interpolation in  $S_3^1(\Delta)$

$i$	$S_7^2(\tilde{\Delta})$			$S_7^2(\Delta_{CT})$		
	dim	$\epsilon_i$	$\delta_i$	dim	$\epsilon_i$	$\delta_i$
1	256	$1.78 \cdot 10^{-1}$	7.72	338	$7.74 \cdot 10^{-2}$	6.64
2	607	$5.12 \cdot 10^{-3}$	5.25	783	$3.66 \cdot 10^{-3}$	4.51
3	1742	$5.45 \cdot 10^{-4}$	5.27	2212	$5.32 \cdot 10^{-4}$	6.29
4	5495	$1.62 \cdot 10^{-5}$	10.25	6851	$7.98 \cdot 10^{-6}$	11.00
5	16588	$2.33 \cdot 10^{-7}$	6.12	20390	$8.38 \cdot 10^{-8}$	6.23
6	54109	$4.21 \cdot 10^{-9}$	8.19	65901	$1.41 \cdot 10^{-9}$	7.73
7	162322	$5.72 \cdot 10^{-11}$	7.71	196496	$2.45 \cdot 10^{-11}$	7.52
8	537628	$5.25 \cdot 10^{-13}$	7.38	649030	$2.53 \cdot 10^{-13}$	7.12
9	1615520	$1.25 \cdot 10^{-14}$		1947066	$6.88 \cdot 10^{-15}$	

Tabelle 7.3: Hermite-Interpolation in  $S_7^2(\Delta)$

$i$	dim	Lagrange		Hermite	
		$\epsilon_i$	$\delta_i$	$\epsilon_i$	$\delta_i$
1	71	$1.39 \cdot 10^{-1}$	2.55	$1.78 \cdot 10^{-1}$	2.95
2	161	$4.29 \cdot 10^{-2}$	5.42	$4.58 \cdot 10^{-2}$	3.77
3	450	$4.24 \cdot 10^{-3}$	1.46	$9.15 \cdot 10^{-3}$	1.75
4	1384	$1.60 \cdot 10^{-3}$	5.02	$2.85 \cdot 10^{-3}$	5.42
5	4103	$2.01 \cdot 10^{-4}$	2.61	$3.02 \cdot 10^{-4}$	3.18
6	13224	$3.62 \cdot 10^{-5}$	4.17	$3.74 \cdot 10^{-5}$	3.78
7	39369	$4.05 \cdot 10^{-6}$	3.21	$5.13 \cdot 10^{-6}$	3.76
8	129923	$5.74 \cdot 10^{-7}$	4.60	$5.21 \cdot 10^{-7}$	3.98
9	389619	$5.61 \cdot 10^{-8}$		$6.93 \cdot 10^{-8}$	

Tabelle 7.4: Lagrange-Interpolation in  $S_3^{0,1}(\Delta)$ 

$i$	dim	Lagrange		Hermite	
		$\epsilon_i$	$\delta_i$	$\epsilon_i$	$\delta_i$
1	53	$1.57 \cdot 10^{-1}$	2.61	$1.86 \cdot 10^{-1}$	2.54
2	114	$4.74 \cdot 10^{-2}$	3.61	$5.78 \cdot 10^{-2}$	4.15
3	306	$1.01 \cdot 10^{-2}$	1.99	$9.82 \cdot 10^{-3}$	1.81
4	911	$2.69 \cdot 10^{-3}$	3.99	$2.95 \cdot 10^{-3}$	4.50
5	2633	$5.16 \cdot 10^{-4}$	3.09	$4.56 \cdot 10^{-4}$	3.32
6	8377	$6.80 \cdot 10^{-5}$	3.23	$5.16 \cdot 10^{-5}$	2.85
7	24693	$1.25 \cdot 10^{-5}$	3.34	$1.15 \cdot 10^{-5}$	3.22
8	81229	$1.64 \cdot 10^{-6}$	4.17	$1.63 \cdot 10^{-6}$	4.13
9	242885	$1.99 \cdot 10^{-7}$		$2.01 \cdot 10^{-7}$	

Tabelle 7.5: Lagrange-Interpolation in  $S_3^1(\tilde{\Delta})$ 

Es zeigt sich, dass unsere Methode im Approximationsverhalten mit dem Interpolanten für den vollständigen Clough-Tocher Split vergleichbar ist. Für die Interpolation mit kubischen Splines beträgt der durchschnittliche Wert für den Decay-Exponenten 3.32 für unseren Interpolanten und 3.58 für die klassische Unterteilung nach Clough-Tocher. Auch der absolute Fehler  $\epsilon_i$  der beiden Interpolanten unterscheidet sich nur gering. Unsere Methode hat den Vorteil, dass deutlich weniger Interpolationsbedingungen benötigt werden. Die Anzahl der Bedingungen beträgt nur rund die Hälfte. Die Berechnung unseres Interpolanten beträgt nur drei Viertel der Berechnungszeit des Interpolanten für die klassische Unterteilung. Dieser Vorteil wird noch deutlicher, wenn fehlende Interpolationsbedingungen an der Kanten durch Approximationsverfahren bestimmt werden müssen, da unser Interpolant nur sehr wenige orthogonale Ableitungen benötigt.

$i$	dim	Lagrange		Hermite	
		$\epsilon_i$	$\delta_i$	$\epsilon_i$	$\delta_i$
1	27	$3.60 \cdot 10^{-1}$	1.20	$5.42 \cdot 10^{-1}$	2.51
2	75	$1.57 \cdot 10^{-1}$	2.54	$9.52 \cdot 10^{-2}$	2.25
3	243	$2.71 \cdot 10^{-2}$	3.91	$2.01 \cdot 10^{-2}$	2.99
4	867	$1.80 \cdot 10^{-3}$	3.07	$2.53 \cdot 10^{-3}$	3.23
5	3267	$2.15 \cdot 10^{-4}$	2.10	$2.68 \cdot 10^{-4}$	3.19
6	12675	$5.00 \cdot 10^{-5}$	2.05	$2.95 \cdot 10^{-5}$	3.09
7	49923	$1.21 \cdot 10^{-5}$	2.02	$3.47 \cdot 10^{-6}$	3.04
8	198147	$2.97 \cdot 10^{-6}$	2.01	$4.20 \cdot 10^{-7}$	3.02
9	789507	$7.36 \cdot 10^{-7}$		$5.17 \cdot 10^{-8}$	

Tabelle 7.6: Lagrange-Interpolation in  $S_2^1(\Delta_{PS})$ 

$i$	dim	$\epsilon_i$	$\delta_i$
1	12	$5.00 \cdot 10^{-1}$	0.23
2	28	$4.28 \cdot 10^{-1}$	1.55
3	84	$1.46 \cdot 10^{-1}$	3.17
4	292	$1.62 \cdot 10^{-2}$	2.97
5	1092	$2.08 \cdot 10^{-3}$	2.03
6	4228	$5.07 \cdot 10^{-4}$	2.00
7	16644	$1.27 \cdot 10^{-4}$	2.00
8	66052	$3.17 \cdot 10^{-5}$	2.00
9	263172	$7.92 \cdot 10^{-6}$	

Tabelle 7.7: Lagrange-Interpolation in  $S_2^1(\tilde{\Delta})$ 

Für die Interpolation in  $S_7^2(\Delta)$  erhalten wir als durchschnittlichen Wert für den Decay-Exponenten 7.24 für unseren und 7.13 für den Interpolanten von Laghchim-Lahlou und Sablonnière. Die Anzahl der Interpolationsbedingungen für unseren Interpolanten ist in diesem Fall um 20 % niedriger als für die klassische Unterteilung.

## 7.2 Lagrange-Interpolation

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Ergebnisse für die Lagrange-Interpolanten aus Kapitel 5. Wir haben hier die beiden kubischen Verfahren für  $S_3^{0,1}(\Delta)$  und  $S_3^1(\tilde{\Delta})$ , sowie die beiden quadratischen Interpolanten für  $S_2^1(\Delta_{PS})$  und  $S_2^1(\tilde{\Delta})$  untersucht und mit den jeweiligen Hermite-Verfahren verglichen. Die einzelnen Ergebnisse sind in den Tabellen 7.4 - 7.7 aufgeführt.

Die beiden kubischen Lagrange-Interpolanten zeigen ein vergleichbares Approxima-

tionsverhalten wie die zugehörigen Hermite-Interpolanten. Auch der absolute Fehler unterscheidet sich nur gering. Die quadratischen Lagrange-Interpolanten besitzen für gleichmäßige  $\Delta^1$ -Triangulierungen ein gutes Approximationsverhalten. Bei beiden Interpolanten ist dies jedoch von den Winkeln der Triangulierung abhängig. Bei Tests auf Delaunay-Triangulierungen aus zufällig verteilten Punkten zeigen die Interpolanten ein schlechteres Approximationsverhalten.

# Literaturverzeichnis

- [1] M. H. Adam: Bivariate Spline-Interpolation auf Crosscut-Partitionen, Dissertation, 1995.
- [2] P. Alfeld: A trivariate Clough-Tocher Scheme for tetrahedral data, Computer Aided Geometric Design 1 (1984): 169-181.
- [3] P. Alfeld: A bivariate  $C^2$  Clough-Tocher Scheme, Computer Aided Geometric Design 1 (1984): 257-267.
- [4] P. Alfeld: On the dimension of piecewise polynomial functions, in Numerical Analysis (ed. D. F. Griffiths und G. A. Watson), Longman Scientific & Technical, London, 1986: 1-23.
- [5] P. Alfeld: A case study of multivariate piecewise polynomials, in Geometric Modeling (ed. G. Farin), SIAM Publication, Philadelphia, 1987: 149-159.
- [6] P. Alfeld: Upper and lower bounds on the dimension of multivariate spline spaces, SIAM Journal on Numerical Analysis 33 (1996): 571-588.
- [7] P. Alfeld, M. Neamtu, L. L. Schumaker: Bernstein-Bezier polynomials on spheres and sphere-like surfaces, Computer Aided Geometric Design 13 (1996): 333-349.
- [8] P. Alfeld, M. Neamtu, L. L. Schumaker: Fitting scattered data on sphere-like surfaces using spherical splines, Journal of computational and applied Mathematics 73 (1996): 5-43.
- [9] P. Alfeld, M. Neamtu, L. L. Schumaker: Dimension and local bases of homogeneous spline spaces, SIAM Journal on mathematical Analysis 27 (1996): 1482-1501.
- [10] P. Alfeld, B. Piper, L. L. Schumaker: Minimally supported bases for spaces of bivariate piecewise polynomials of smoothness  $r$  and degree  $d \geq 4r+1$ , Computer Aided Geometric Design 4 (1987): 105-123.
- [11] P. Alfeld, B. Piper, L. L. Schumaker: An explicit Basis for  $C^1$  quartic bivariate splines, SIAM Journal on Numerical Analysis 24 (1987): 891-911.

- [12] P. Alfeld, L. L. Schumaker: The dimension of bivariate spline spaces of smoothness  $r$  for degree  $d \geq 4r + 1$ , *Constructive Approximation* 3 (1987): 189-197.
- [13] P. Alfeld, L. L. Schumaker: On the dimension of bivariate spline spaces of smoothness  $r$  and degree  $d = 3r + 1$ , *Numerische Mathematik* 57 (1990): 651-661.
- [14] P. Alfeld, L. L. Schumaker: The dimension and existence of local bases for multivariate spline spaces, *Journal of Approximation Theory* 70 (1992): 243-264.
- [15] F. Aurenhammer: Voronoi Diagrams - A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure, *ACM Computing Surveys* 23 (1991): 345-405.
- [16] C. Bajaj, F. Bernardini, G. Xu: Automatic reconstruction of surfaces and scalar fields from 3D scans, in *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, Proceedings of SIGGRAPH 95*, ACM SIGGRAPH, 1995: 109-118.
- [17] C. Bajaj, F. Bernardini, G. Xu: Reconstructing surfaces and functions on surfaces from unorganized 3D data, *Algorithmica* 19 (1997): 243-261.
- [18] M. Bern, D. Eppstein: Mesh Generation and Optimal Triangulation, in *Computing in Euclidean Geometry* (ed. D. Du und F. Hwang), *Lecture Notes Series on Computing* 1, World Scientific, Singapore, 1992: 23-90.
- [19] F. Bernardini, C. Bajaj, J. Chen, D. Schikore: Automatic Reconstruction of 3D CAD Models from Digital Scans, *International Journal on Computational Geometrics and Applications* 9 (1999): 327-370.
- [20] L. J. Billera: Homology of smooth splines: Generic triangulations and a conjecture of Strang, *Transactions of the American Mathematical Society* 310 (1988): 325-340.
- [21] W. Boehm, G. Farin, J. Kahmann: A survey of curve and surface methods in CAGD, *Computer Aided Geometric Design* 1 (1984): 1-60.
- [22] C. de Boor: B-Form Basics, in *Geometric Modeling* (ed. G. Farin), SIAM Publication, Philadelphia, 1987: 131-148.
- [23] C. de Boor: A Local Basis for Certain Smooth Bivariate PP Spaces, in *Multivariate Approximation Theory IV* (ed. W. Schempp und K. Zeller), Birkhäuser, Basel, 1989: 25-30.
- [24] C. de Boor, K. Höllig: Approximation Power of Smooth Bivariate PP Functions, *Mathematische Zeitschrift* 197 (1988): 343-363.
- [25] C. de Boor, R. Q. Jia: A sharp upper bound on the Approximation order of smooth PP Functions, *Journal of Approximation Theory* 72 (1993): 24-33.



- [26] P. Bose, G. Toussaint: Characterizing and efficiently computing quadrangulations of planar point sets, *Computer Aided Geometric Design* 14 (1997): 763-785.
- [27] J. H. Bramble, S. R. Hilbert: Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with applications to Fourier transforms and spline interpolation, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 7 (1970): 112-124.
- [28] J. H. Bramble, S. R. Hilbert: Bounds for a Class of Linear Functionals with Applications to Hermite Interpolation, *Numerische Mathematik* 16 (1971): 362-369.
- [29] L. P. Chew: Guaranteed-Quality Triangular Meshes, Technical Report TR-89-983, Department of Computer Science, Cornell University, 1989.
- [30] Y. S. Chou, L.-Y. Su, R. H. Wang: The Dimension of Bivariate Spline Spaces over Triangulations, in *Multivariate Approximation Theory III* (ed. W. Schempp und K. Zeller), Birkhäuser, Basel 1985: 71-83.
- [31] C. K. Chui: *Multivariate Splines*, CMBS Vol. 54, SIAM Publications, Philadelphia 1988.
- [32] C. K. Chui, T. X. He: On Location of Sample Points for Interpolation by Bivariate  $C^1$  Quadratic Splines, in *Numerical Methods of Approximation Theory* (ed. L. Collatz, G. Meinardus, G. Nürnberger), Birkhäuser, Basel, 1987: 30-43.
- [33] C. K. Chui, T. X. He: On the dimension of bivariate superspline spaces, *Mathematics of Computation* 53 (1989): 219-234.
- [34] C. K. Chui, T. X. He: Bivariate  $C^1$  Quadratic Finite Elements and Vertex Splines, *Mathematics of Computation* 54 (1990): 169-187.
- [35] C. K. Chui, D. Hong: Construction of Local  $C^1$  Quartic Spline Elements for Optimal-Order Approximation, *Mathematics of Computation* 65 (1996): 85-98.
- [36] C. K. Chui, D. Hong: Swapping Edges of Arbitrary Triangulations to Achieve the Optimal Order of Approximation, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 34 (1997): 1472-1482.
- [37] C. K. Chui, D. Hong, R. Q. Jia: Stability of Optimal-Order Approximation by Bivariate Splines over Arbitrary Triangulations, *Transactions of the American Mathematical Society* 347 (1995): 3301-3318.
- [38] C. K. Chui, M.-J. Lai: On bivariate vertex splines, in *Multivariate Approximation Theory III* (ed. W. Schempp und K. Zeller), Birkhäuser, Basel 1985: 84-115.
- [39] C. K. Chui, M.-J. Lai: On Bivariate Super Vertex Splines, *Constructive Approximation* 6 (1990): 399-419.

- [40] C. K. Chui, M.-J. Lai: Multivariate vertex splines and finite Elements, *Journal of Approximation Theory* 60 (1990): 245-343.
- [41] C. K. Chui, R.-H. Wang: Multivariate Spline Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 94 (1983): 197-221.
- [42] C. K. Chui, R.-H. Wang: On smooth Multivariate Spline Functions, *Mathematics of Computation* 41 (1983): 131-142.
- [43] C. K. Chui, R.-H. Wang: Spaces of bivariate cubic and quartic splines on type-1 triangulations, *Journal of Mathematical Analysis and its applications* 101 (1984): 540-554.
- [44] P. G. Ciarlet: *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [45] R. W. Clough, J. L. Tocher: Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending, in *Proceedings of the conference on Matrix Methodes in Structural Mechanics*, Wright Patterson A. F. B., Ohio, 1965.
- [46] O. Davydov, G. Nürnberger: Interpolation by  $C^1$  splines of degree  $q \geq 4$  on triangulations, *Journal of computational and applied Mathematics* 17 (2001): 181-208.
- [47] O. Davydov, G. Nürnberger, G. Walz, F. Zeilfelder: Bivariate Splines on Crosscut Partitions, in *Multivariate Approximation*, (ed. G. Nürnberger, J. W. Schmidt, G. Walz), Birkhäuser, Basel, 1997: 189-203.
- [48] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Approximation Order of Bivariate Spline Interpolation for arbitrary smoothness, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 90 (1998): 117-134.
- [49] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by cubic splines on triangulations, in *Approximation Theory*, (ed. C. K. Chui, L. L. Schumaker), Vanderbilt, University Press, Nashville, 1998: 17-24.
- [50] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by splines on triangulations, *New developments in Approximation Theory*, (ed. M. W. Müller), ISNM 132, Birkhäuser, Basel, 1999: 49-70.
- [51] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Bivariate spline interpolation with optimal approximation order, *Constructive Approximation* (2001), erscheint.
- [52] O. Davydov, G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Cubic spline interpolation on nested polygon triangulations, in *Curve and Surfaces Fitting*, (ed. A. Cohen, C. Rabut, L.L. Schumaker), St. Malo 1999, France, Nashville 2000, 161-170.

- [53] D. Diener: Instability in the Dimension of spaces of bivariate piecewise polynomials of degree  $2r$  and smoothness order  $r$ , SIAM Journal on Numerical Analysis 27 (1990): 543-551.
- [54] P. Dierckx: Curve and Surface Fitting with Splines, Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [55] M. B. Dillencourt: Hamiltonian Cycles in Planar Triangulations with no Separating Triangles, Journal of Graph Theory 14 (1990): 31-49.
- [56] M. B. Dillencourt: Toughness and Delaunay Triangulations, Discrete & Computational Geometry 5 (1990): 575-601.
- [57] R. A. Dwyer: A Faster Divide-and-Conquer Algorithm for Constructing Delaunay Triangulations, Algorithmica 2 (1987): 137-151.
- [58] N. Dyn, J. A. Gregory, D. Levin: A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design, Computer Aided Geometric Design 4 (1987): 257-268.
- [59] N. Dyn, J. A. Gregory, D. Levin: A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control, ACM Transactions on graphics 9 (1990): 160-169.
- [60] N. Dyn, D. Levin: Interpolating subdivision schemes for the generation of curves and surfaces, in Multivariate approximation and interpolation, (ed. W. Haußmann), ISNM 94 (1990): 91-106.
- [61] J. Edmonds: Paths, Trees and Flowers, Canadian Journal of Mathematics, 17 (1965): 449-467.
- [62] G. Farin: Bézier Polynomials Over Triangles, Report TR/91, Uxbridge, England, Department of Mathematics, Brunel University, 1980.
- [63] G. Farin: A modified Clough-Tocher interpolant, Computer Aided Geometric Design 2 (1985): 19-27.
- [64] G. Farin: Triangular Bernstein-Bézier patches, Computer Aided Geometric Design 3 (1986): 83-127.
- [65] G. Farin: Curves and surfaces for computer aided geometric design, Academic Press, Boston, 1997.
- [66] S. Fortune: A Sweep-line Algorithm for Voronoi Diagrams, Algorithmica 2 (1987): 153-174.
- [67] G. Fraeijs de Veubeke: Bending and stretching of plates, in Proceedings of the conference on Matrix Methodes in Structural Mechanics, Wright Patterson A. F. B., Ohio, 1965.

- [68] R. Franke: Scattered data interpolation, *Mathematics of Computation*, 38 (1982): 181-200.
- [69] J. Gao: A Remark on Interpolation by Bivariate Splines, *Approximation Theory and its Applications* 7,2 (1991): 41-50.
- [70] J. Gao: A new finite element of  $C^1$  cubic Splines, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 40 (1992): 305-312.
- [71] J. Gao: A  $C^2$  finite element and interpolation, *Computing* 50 (1993): 69-76.
- [72] M. Garland, P. S. Heckbert: Surface Simplification Using Quadric Error Metrics, *SIGGRAPH* 97.
- [73] R. H. J. Gmelig Meyling: Approximation by Cubic  $C^1$ -Splines on Arbitrary Triangulations, *Numerische Mathematik* 51 (1987): 65-85.
- [74] R. H. J. Gmelig Meyling, P. R. Pfluger: On the dimension of the Spline Space  $S_2^1(\Delta)$  in special cases, in *Multivariate Approximation Theory III* (ed. W. Schempp und K. Zeller), Birkhäuser, Basel, 1985: 180-190.
- [75] R. H. J. Gmelig Meyling, P. R. Pfluger: Smooth interpolation to scattered data by bivariate piecewise polynomials of odd degree, *Computer Aided Geometric Design* 7 (1990): 439-458.
- [76] T. A. Grandine: An iterative method for computing multivariate  $C^1$  piecewise polynomial interpolants, *Computer Aided Geometric Design* 4 (1987): 307-319.
- [77] A. Guézic: Surface Simplification with variable tolerance, in *Second Annual International Symposium on Medical Robotics and Computer Assisted Surgery*, 1995: 132-139.
- [78] L. J. Guibas, J. Stolfi: Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and the Computation of Voronoi Diagrams, *ACM Transactions on Graphics* 4 (1985): 74-123.
- [79] S. Hahmann, G. Bonneau: Triangular  $G^1$  interpolation by 4-splitting domain triangles, *Computer Aided Geometric Design* 17 (2000): 731-757.
- [80] G. Herron: Techniques for Visual Continuity, in *Geometric Modeling: Algorithms and New Trends* (ed. G. Farin), SIAM, 1987: 163-174.
- [81] D. Hong: Spaces of Bivariate Spline Functions over Triangulations, *Approximation Theory and its Applications* 7,1 (1991): 56-75.
- [82] H. Hoppe: Progressive meshes, in *SIGGRAPH 96 Proceedings*, 1996: 132-139.
- [83] H. Hoppe: New quadric metric for simplifying meshes with appearance attributes, in *Visualization 99 Proceedings*, IEEE, 1999: 59-66.

- [84] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonald, W. Stuetzle: Mesh optimization, in SIGGRAPH 93 Proceeding, 1993: 19-26.
- [85] A. Kh. Ibrahim, L. L. Schumaker: Super Spline Spaces of Smoothness  $r$  and Degree  $d \geq 3r + 2$ , Constructive Approximation 7 (1991): 401-423.
- [86] R. Q. Jia: Approximation order from certain spaces of smooth bivariate splines on a three directional mesh, Transactions of the American Mathematical Society 295 (1986): 199-212.
- [87] D. Jungnickel: Graphs, Networks and Algorithms, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [88] A. D. Kalvin, R. H. Taylor: Surfaces: Polygonal mesh simplification with bounded error, IEEE Computer Graphics and Applications, 16, 1996.
- [89] L. Kobbelt: A variational approach to subdivision, Computer Aided Geometric Design 13 (1996): 743-761.
- [90] M. Laghchim-Lahlou, P. Sablonnière: Triangular finite elements of HCT type and class  $C^\rho$ , Advances in Computational Mathematics 2 (1994): 101-122.
- [91] M. Laghchim-Lahlou, P. Sablonnière: Quadrilateral finite elements of FVS type and class  $C^\rho$ , Numerische Mathematik 70 (1995): 229-243.
- [92] M. Laghchim-Lahlou, P. Sablonnière:  $C^r$ -finite elements of Powell-Sabin type on the three direction mesh. Advances in Computational Mathematics 6, (1997): 191-206.
- [93] M. Laghchim-Lahlou, P. Sablonnière: The  $C^r$ -fundamental splines of Clough-Tocher and Powell-Sabin types for Lagrange interpolation on a three direction mesh, Advances in Computational Mathematics 8 (1998): 353-366.
- [94] M.-J. Lai: On dual Functionals of Polynomials in B-Form, Journal of Approximation Theory 67 (1991): 19-37.
- [95] M.-J. Lai: Approximation order from bivariate  $C^1$ -cubics on a four directional mesh is full, Computer Aided Geometric Design 11 (1994): 215-223.
- [96] M.-J. Lai: Scattered data interpolation and approximation using bivariate  $C^1$  piecewise cubic polynomials, Computer Aided Geometric Design 13 (1996): 81-88.
- [97] M.-J. Lai: On  $C^2$  quintic spline functions over triangulations of Powell-Sabin's type, Journal of computational and applied mathematics 73 (1996): 135-155.
- [98] M.-J. Lai, L. L. Schumaker: Scattered Data Interpolation Using  $C^2$ -Supersplines of Degree Six, SIAM Journal on numerical Analysis 34 (1997): 905-921.

- [99] M.-J. Lai, L. L. Schumaker: On the approximation Power of bivariate Splines, *Advances in Computational Mathematics* 9 (1998): 251-279.
- [100] M.-J. Lai, L. L. Schumaker: On the approximation Power of splines on triangulated quadrangulations, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 36 (1998): 143-159.
- [101] M.-J. Lai, L. L. Schumaker: Macro-elements and stable local bases for splines on Clough-Tocher triangulations, *Numerische Mathematik* 88 (2001): 105-119.
- [102] C. L. Lawson: Software for  $C^1$  Surface Interpolation, *Mathematical Software III* (ed. J. R. Rice), Academic Press, New York, 1977: 161-194.
- [103] X. Liu, L. L. Schumaker: Hybrid Bezier patches on sphere-like surfaces, *Journal of computational and applied Mathematics* 73 (1996): 157-172.
- [104] C. Loop: A  $G^1$  triangular spline surface of arbitrary topological type, *Computer Aided Geometric Design* 11 (1994): 303-330.
- [105] L. Lovász, M. D. Plummer: *Matching Theory*, *Annals of Discrete Mathematics* 29, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [106] J. Morgan, R. Scott: A nodal basis for  $C^1$ -piecewise polynomials of degree  $n \geq 5$ , *Mathematics of Computation* 29 (1975): 736 - 740.
- [107] J. Morgan, R. Scott: *The dimension of piecewise polynomials*, 1977, Manuskript.
- [108] T. Nishizeki, N. Chiba: *Planar Graphs: Theory and Algorithms*, *Annals of Discrete Mathematics* 32, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [109] G. Nürnberger: *Approximation by Spline Functions*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [110] G. Nürnberger: Approximation Order of Bivariate Spline Interpolation, *Journal of Approximation Theory* 87 (1996): 117-136.
- [111] G. Nürnberger, Th. Riessinger: Lagrange and Hermite Interpolation by Bivariate Splines, *Numerical Functional Analysis and Optimization* 13 (1992): 75-96.
- [112] G. Nürnberger, Th. Riessinger: Bivariate spline interpolation at grid points, *Numerische Mathematik* 71 (1995): 91-119.
- [113] G. Nürnberger, G. Walz: Error Analysis in Interpolation by Bivariate  $C^1$ -Splines, *IMA Journal of Numerical Analysis* 18 (1998): 485-508.
- [114] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Spline interpolation on convex quadrangulations, in *Approximation Theory IX* (ed. C. K. Chui, L. L. Schumaker) Vanderbilt University Press, Nashville, 1998: 259-266.

- [115] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Lagrange interpolation by splines on triangulations, in Proceedings on the Morningside Institute (ed. R. H. Wang), Peking, 1998.
- [116] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: On bivariate spline spaces, in Advances in Multivariate Approximation (ed. W. Haußmann, K. Jetter, M. Reimer), Wiley-VCH, Berlin, 1998: 227-230.
- [117] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by spline spaces on classes of triangulations, Journal of Computational and Applied Mathematics, 119 (2000): 347-376.
- [118] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Developments in bivariate spline interpolation, Journal of Computational and Applied Mathematics, 121 (2000): 125-152.
- [119] P. Percell: On cubic and quartic Clough-Tocher finite Elements, SIAM Journal on numerical Analysis 13 (1976): 100-103.
- [120] B. R. Piper: Visually Smooth Interpolation with Triangular Bézier Patches, in Geometric Modeling: Algorithms and New Trends (ed. G. Farin), SIAM, 1987: 163-174.
- [121] M. J. D. Powell, M. A. Sabin: Piecewise quadratic approximations on triangles, ACM Transactions on Mathematical Software 3 (1977): 316-325.
- [122] S. Ramaswami, P. Ramos, G. Toussaint: Converting triangulations to quadrangulations, Computational Geometry 9 (1998): 257-276.
- [123] U. Reif: A unified approach to subdivision algorithms near extraordinary vertices, Computer Aided Geometric Design 12 (1995): 153-174.
- [124] J. Ruppert: A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation, Journal of Algorithms 18 (1995): 548-585.
- [125] P. Sablonnière: Composite finite elements of class  $C^k$ , Journal of computational and applied Mathematics 12 & 13 (1985): 541-550.
- [126] P. Sablonnière: Composite finite elements of class  $C^2$ , in Topics in Multivariate Approximation (ed. C. K. Chui, L. L. Schumaker und F. I. Utreras) Academic Press, New York, 1987, 207-217.
- [127] W. J. Schroeder, J. A. Zarge, W. E. Lorensen: Decimation of triangle meshes, Computer Graphics 26 (1992): 65-70.
- [128] L. L. Schumaker: On the dimension of spaces of piecewise polynomials in two variables, in Multivariate Approximation Theory (ed. W. Schempp und K. Zeller), Birkhäuser, Basel, 1979: 396-412.
- [129] L. L. Schumaker: Bounds on the Dimension of Spaces of multivariate piecewise polynomials, Rocky Mountain Journal of Mathematics 14 (1984): 251-264.

- [130] L. L. Schumaker: Dual bases for spline spaces on cells, *Computer Aided Geometric Design* 5 (1988): 277-284.
- [131] L. L. Schumaker: On super splines and finite elements, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 26 (1989): 997-1005.
- [132] Z. Sha: On Interpolation by  $S_2^1(\Delta_{m,n}^2)$ , *Approximation Theory and its Applications* 1 (1985): 1-18.
- [133] Z. Sha: On Interpolation by  $S_3^1(\Delta_{m,n}^1)$ , *Approximation Theory and its Applications* 1 (1985): 71-82.
- [134] P. Shenkman, N. Dyn, D. Levin: Normals of the butterfly subdivision scheme surfaces and their applications, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 102 (1999): 157-180.
- [135] J. R. Shewchuk: *Lecture Notes on Delaunay Mesh Generation*, Berkeley, University of California, 1999.
- [136] G. Strang: Piecewise Polynomials and the Finite Element Method, *Bulletin of the American Mathematical Society* 79 (1973): 1128-1137.
- [137] G. Strang, G. Fix: *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1973.
- [138] P. Su: *Efficient Parallel Algorithms for Closest Point Problems*, Ph.D. thesis, Dartmouth College, Hanover, New Hampshire, 1994.
- [139] L. Volkmann: *Fundamente der Graphentheorie*, Springer-Verlag, Wien, 1996.
- [140] R. H. Wang: The dimension and basis of bivariate splines, *Journal of computational and applied Mathematics* 12 (1985): 163-177.
- [141] T. Wang: A  $C^2$ -quintic spline interpolation scheme on triangulations, *Computer Aided Geometric Design* 9 (1992): 379-386.
- [142] T. Whelan: A representation of a  $C^2$  interpolant over triangles, *Computer Aided Geometric Design* 3 (1986): 53-66.
- [143] A. J. Worsey, G. Farin: An  $n$ -dimensional Clough-Tocher interpolant, *Constructive Approximation* 3 (1987): 99-110.
- [144] X. Ye, Y. Liang, H. Nowacki: Geometric continuity between adjacent Bézier patches and their construction, *Computer Aided Geometric Design* 13 (1996): 521-548.
- [145] K. Zhao, J. Sun: Dual Bases of multivariate Bernstein-Bézier polynomials, *Computer Aided Geometric Design* 5 (1988): 119-125.